Modellierungen sowie innermathematische Fragestellungen erfordern die Auswahl aus bekannten Funktionsklassen bzw. deren zielgerichtete Verkettung und Verknüpfung. Zu einer ersten Eingrenzung wird die Betrachtung globaler Eigenschaften wie das Verhalten für $|x| \to \infty$, Periodizität, Symmetrie zur y-Achse bzw. zum Koordinatenursprung herangezogen.

Vorgegebene oder ableitbare lokale Eigenschaften (Funktionswerte, Steigungen, Extrempunkte, Wendepunkte, …) führen auch unter Berücksichtigung der Anzahl der gestellten Bedingungen zu einer weiteren Eingrenzung bezüglich der Funktionen, die zur weiteren Bearbeitung geeignet sind. Eine Vielfalt der Aufgabenstellungen ermöglicht Übungs- und Vertiefungsmöglichkeiten vielfältiger Kompetenzen.

Bekannte Funktionsklassen (klassifiziert nach Termstruktur)

- Potenzfunktionen f mit $f(x) = x^n$ für $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$
- Ganzrationale Funktionen
- Exponentialfunktionen
- Sinusfunktion
- Quadratwurzelfunktion (Definitionsbereich, Verlaufsskizze des Graphen)
- Natürliche Logarithmusfunktion (Definitionsbereich, Verlaufsskizze des Graphen)

Funktionstypen werden nach typischen Eigenschaften der Funktionsgraphen unterschieden, zum Beispiel bezüglich der Symmetrie.

Verknüpfungen und Verkettungen

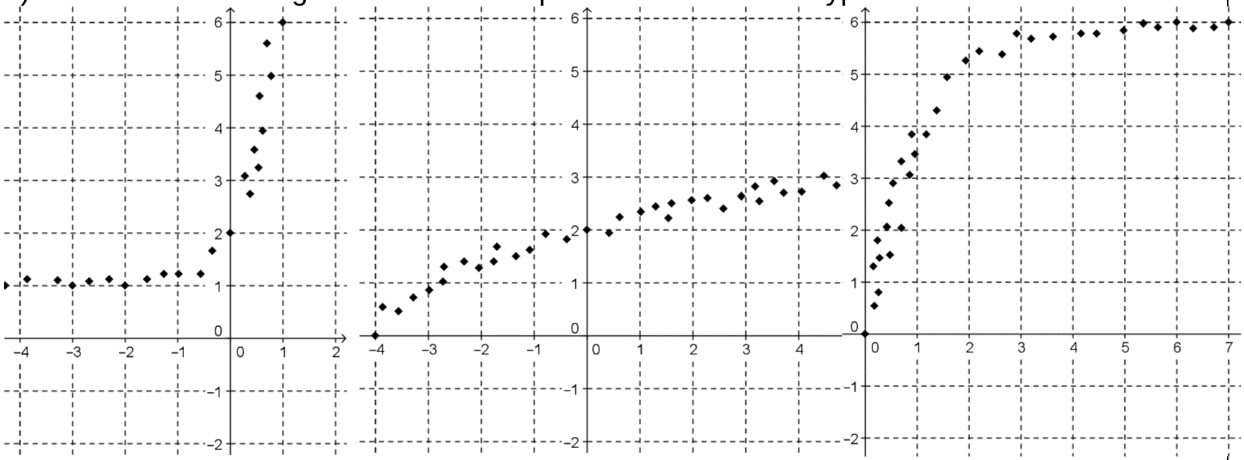
Von besonderer Bedeutung sind die Verknüpfungen und Verkettungen von ganzrationalen und Exponentialfunktionen (s. OM 31 Wachstumsmodelle - Exponentialfunktion eA).

Bei den weiteren Funktionstypen ist im OM 11 Elementare Funktionenlehre-Parametervariationen der Zusammenhang zwischen Verschiebungen und Streckungen in Richtung der Koordinatenachsen, der Spiegelung an diesen und den Parametern dargestellt und damit auch einfachste Verknüpfungen und Verkettungen.

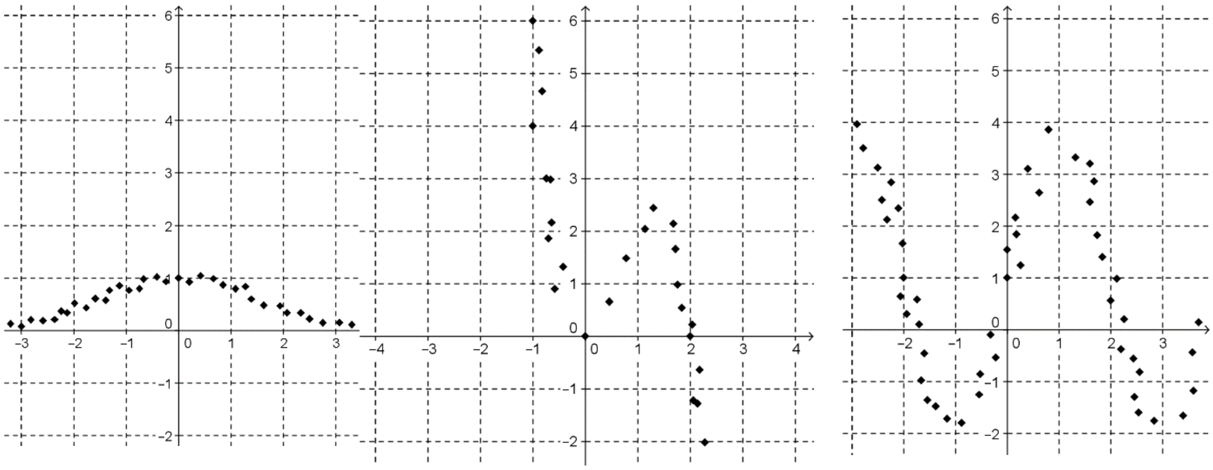
Hinsichtlich einzelner Gesichtspunkte wie Symmetrie, Nullstellen/ Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen oder Definitionsmenge kann aus den Eigenschaften der Teilfunktionen auf die verketteter/verknüpfter Funktionen geschlossen werden.

Beispielaufgabe Zuordnung von Funktionstypen

a) Beschreiben Sie, welche globalen und/oder lokalen Eigenschaften ein Funktionsgraph haben muss, um die dargestellten Datenpunkte zu modellieren.
b) Ordnen Sie den Eigenschaften einen passenden Funktionstyp zu.



I II III



IV V VI

Weitere Aufgabenstellungen:
Bestimmen Sie, insbesondere zu IV und V, unter Verwendung von angenommenen lokalen Eigenschaften jeweils Funktionsterme.

Weitere Beispiele zu Verknüpfungen und Verkettungen, die sich zur Beschreibung von Zusammenhängen in außer- und innermathematischen Kontexten eignen:

$e^{(x-k)^2}$, $a+b\cdot e^{c\cdot x}$, $\dfrac{a\cdot b}{a+(b-a)\cdot e^{-b\cdot c\cdot x}}$, $x\cdot(x-2)\cdot e^{x}$,

$\sqrt{x+2}-x$, $\sqrt{x^2+4}$, $\sqrt{x^2-4}$, $\sin(a\cdot(x+b))$

Stückweise definierte Funktionen, Stetigkeit, Differenzierbarkeit

Bei der Betrachtung stückweise definierter Funktionen werden die Phänomene Sprungfreiheit und Knickfreiheit erkundet, mit den entsprechenden Begriffen bezeichnet und als Stetigkeit und Differenzierbarkeit mathematisiert, z. B. wie folgt.

Eine Funktion f heißt **stetig** an einer Stelle x, wenn $\lim\limits_{h\to 0} f(x+h)$ existiert und der links- und rechtseitige Grenzwert gleich sind: $\lim\limits_{h\to 0} f(x-h) = \lim\limits_{h\to 0} f(x+h),\ h>0$.

Eine Funktion heißt **stetig**, wenn sie an jeder Stelle ihres Definitionsbereiches stetig ist.

Eine Funktion f heißt **differenzierbar** an einer Stelle x, wenn der Grenzwert des Differenzenquotienten existiert, d. h. der links- und rechtseitige Grenzwert gleich sind:
$\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x)-f(x-h)}{h},\ h>0$.

Eine Funktion heißt **differenzierbar**, wenn sie an jeder Stelle ihres Definitionsbereiches differenzierbar ist.

Eine Erweiterung des Grenzwertbegriffs über den (im Online-Material „Propädeutischer Grenzwert“ beschriebenen) propädeutischen Grenzwertbegriff hinaus ist nicht Bestandteil des Kerns des Curriculums.

Zur Abgrenzung ist zu betrachten, in welchen Fällen die stetige bzw. differenzierbare Ergänzung zu einer vereinfachten Untersuchung führt.

Parametervariation, Klassifizierung

Die Parametervariation bezüglich Verschiebungen, Streckungen und Spiegelungen ist aus anderen Kontexten bekannt. Die Variation von Parametern, die nicht notwendig direkt auf solche Abbildungen zurückzuführen ist, erweitert die Sichtweise.

Beispielaufgabe zur Variation des Parameters

Gegeben ist die Funktionenschar f_k mit $f_k(x) = 0{,}5\,x^3 \cdot e^{-0{,}6x+k}$, $k>0$, $x \in \mathbb{R}$.

- Beschreiben Sie den Einfluss des Parameters k auf die Lage der Hochpunkte der Graphen der Schar.
- Bestimmen Sie einen Wert für k, so dass die Funktion das lokale Maximum 4,5 hat.
- Rechts vom Hochpunkt darf die Profillinie nicht zu steil abfallen und deshalb an keiner Stelle die Steigung von $-0{,}76$ unterschreiten.
  Untersuchen Sie, für welche Werte für k die Graphen von f_k rechts vom Hochpunkt die Steigung von $-0{,}76$ nicht unterschreitet. Ohne Nachweis können Sie verwenden, dass jede Funktion f_k genau 3 Wendestellen besitzt.

In Anlehnung an eine Abituraufgabe 2010

Lösungsskizze:

- Eine graphische Betrachtung zeigt: Die x-Koordinate aller Hochpunkte ist 5. Je größer k, desto höher liegt der Hochpunkt.
- k ergibt sich aus der Gleichung $f_k(5) = 0,5 \cdot 5^3 \cdot e^{-3+k} = 4,5$. $k \approx 0,369$
- Gesucht sind die Werte für k, für die im Bereich $5 < x < 13$ gilt: $f_k'(x) \geq -0,76$. Das Minimum der Steigung rechts des Hochpunktes liegt im entsprechenden Wendepunkt des Graphen von f_k.

  $f_k''(x) = 0$; $(0,18x^3 - 1,8x^2 + 3x) = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = 5 - \frac{5}{3}\sqrt{3}$; $x_3 = 5 + \frac{5}{3}\sqrt{3}$.

  Die gesuchte Stelle ist $5 + \frac{5}{3}\sqrt{3}$.

  $f_k'(5 + \frac{5}{3}\sqrt{3}) \approx -0,474 \cdot e^k$; $-0,474 \cdot e^k \geq -0,76$; näherungsweise $k \leq 0,471$.

  Für $0 < k \leq 0,471$ ist die Bedingung erfüllt.

Lösungsskizze:

- Eine graphische Betrachtung zeigt: Die x-Koordinate aller Hochpunkte ist 5. Je größer k, desto höher liegt der Hochpunkt.
- k ergibt sich aus der Gleichung $f_k(5) = 0,5 \cdot 5^3 \cdot e^{-3+k} = 4,5$. $k \approx 0,369$

Gesucht sind die Werte für k, für die im Bereich $5 < x < 13$ gilt: $f_k'(x) \geq -0,76$. Das Minimum der Steigung rechts des Hochpunktes liegt im entsprechenden Wendepunkt des Graphen von f_k.

$f_k''(x) = 0$; $(0,18x^3 - 1,8x^2 + 3x) = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = 5 - \frac{5}{3}\sqrt{3}$; $x_3 = 5 + \frac{5}{3}\sqrt{3}$.

Die gesuchte Stelle ist $5 + \frac{5}{3}\sqrt{3}$.

$f_k'(5 + \frac{5}{3}\sqrt{3}) \approx -0,474 \cdot e^k$; $-0,474 \cdot e^k \geq -0,76$; näherungsweise $k \leq 0,471$.

Für $0 < k \leq 0,471$ ist die Bedingung erfüllt.

Beispielaufgabe zur Variation des Parameters und zur Klassifikation

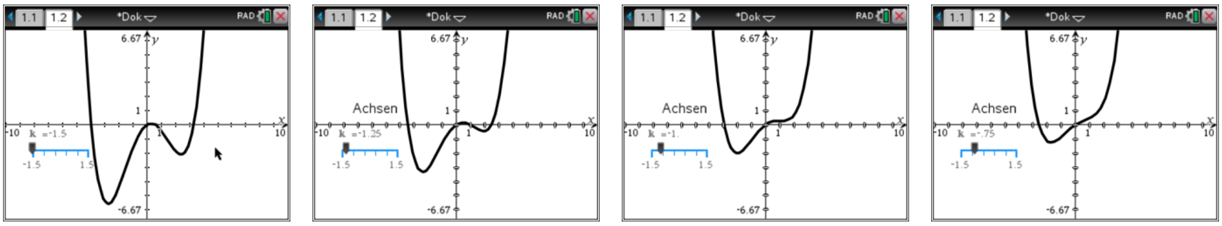
Gegeben ist die Funktionenschar f_a mit $f_a(x) = \frac{1}{12} \cdot x^4 - \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot x^2 + \frac{2}{3} \cdot x$, $x \in \mathrm{IR}$, $a \in \mathrm{IR}$.

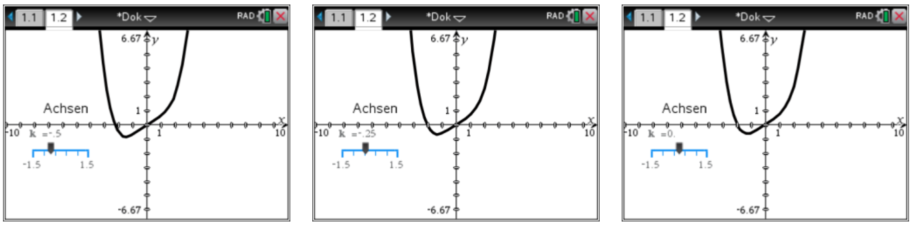
Stellen Sie Vertreter der Schar graphisch dar und formulieren Sie eine Hypothese hinsichtlich der Anzahl der Wendepunkte in Abhängigkeit von a.

Überprüfen Sie Ihre Hypothese.

Klassifizieren Sie die Schar hinsichtlich der Anzahl der Wendepunkte.

Lösungsskizze:





Für jeden Wert a mit $a > 0$ sind die Graphen identisch mit dem Graphen für $-a$.

Angabe einer Hypothese zur Anzahl der Wendepunkte

Die notwendige Bedingung $f_a''(x_W) = 0$ liefert $x_{W1} = a$ und $x_{W2} = -a$ als mögliche Kandidaten für Wendestellen. Da für $a \neq 0$ gilt $f_a'''(x_{W2}) = 2 \cdot a \neq 0$ und $f_a'''(x_{W2}) = -2 \cdot a \neq 0$, gibt es für $a \neq 0$ zwei Wendestellen. Für $a = 0$ ändert $f_a''(x) = x^2$ an der Stelle 0 das Vorzeichen nicht, es liegt also keine Wendestelle vor.

Beispielaufgabe: Parameterbestimmung

Nebenstehendes Bild ergibt sich, wenn man eine Kette aufhängt.

Bei der Wahl eines geeigneten Koordinatensystems ergeben sich folgende Daten:

0	1	2	3	4
0	0,44	2	5.56	12,6

a) Wählen Sie als Modellfunktion eine quadratische Funktion und beurteilen Sie diese Modellierung hinsichtlich ihrer Eignung.

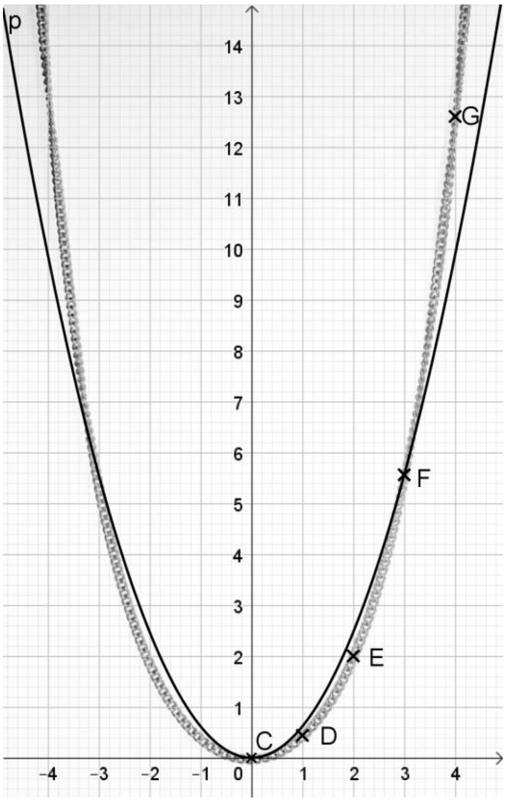
b) In der Literatur wird eine sogenannte Kettenlinie vorgeschlagen, die durch

$$\text{ket}(a,b,x)=\frac{a}{2}\cdot\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)+b$$

modelliert werden kann.
Bestimmen Sie näherungsweise geeignete Werte für die Parameter a und b.

Lösungshinweise

a) Z. B. Argumentation über die unterschiedliche „Krümmung".



b) Für $a=1{,}3$ und $b=1{,}3$ erhält man folgende Darstellung: