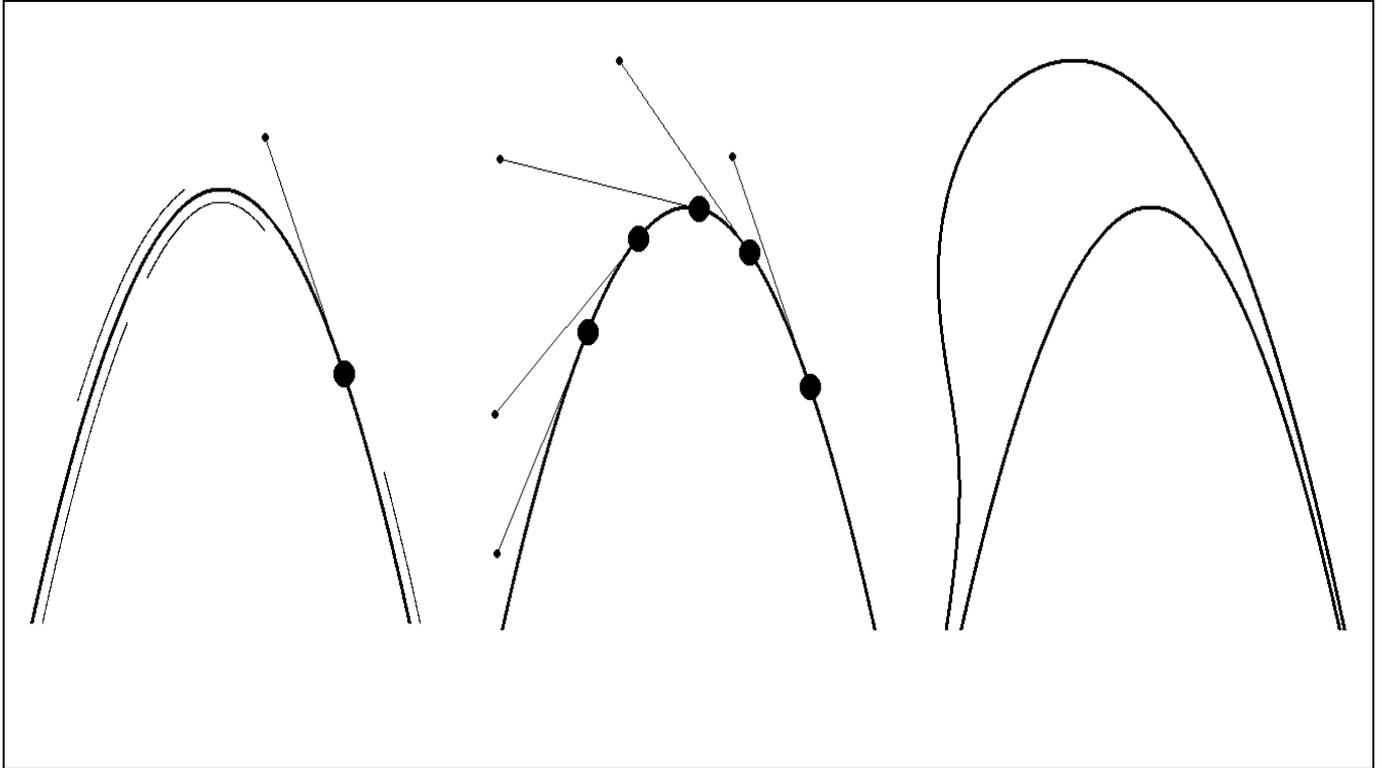


Mathematik

Niedersächsisches
Kultusministerium



**Empfehlungen für den
Mathematikunterricht an Gymna-
sien**

Niedersachsen

Herausgeber:
Niedersächsisches Kultusministerium
Referat Presse und Öffentlichkeitsarbeit
Schiffgraben 12
30159 Hannover

Dezember 1997

Gedruckt auf chlorfrei gebleichtem
Recyclingpapier

Inhalt

1	Einleitung	1
2	Leitlinien zur Themenauswahl und Unterrichtsgestaltung	2
2.1	Beitrag des Mathematikunterrichts zur Allgemeinbildung	2
2.2	Fundamentale Ideen der Mathematik als curriculare Strukturierungshilfe – Wecken von Grundvorstellungen	6
2.3	Die beiden Aspekte der Mathematik	10
2.4	Angestrebte Fähigkeiten, Einstellungen und Verhaltensweisen der Schülerinnen und Schüler	11
2.5	Bedingungen für den Lernprozess	12
3	Zu Veränderungen des Unterrichts	17
3.1	Veränderung von Inhalten und Methoden – Abkehr von der Kalkül-orientierung	17
3.2	Erste Ergebnisse aus Schulversuchen zum Einsatz von Taschencomputern im Mathematikunterricht	19
3.3	Überblick über wesentliche Elemente der im Anhang aufgeführten Unterrichtsbeispiele	21
4	Hinweise zu Maßnahmen	24
4.1	Lehrerausbildung	24
4.2	Lehrerfortbildung	25
4.3	Konzeption von Rahmenrichtlinien	26
4.4	Primar- und Orientierungsstufe	27
5	Fazit	28
	Quellenverzeichnis	30
	Anhang:	
	Unterrichtsbeispiele 1 – 5 zu quadratischen Gleichungen	
	Unterrichtsbeispiel 6 zu Splines	

1 Einleitung

Der Computer zwingt uns zum Nachdenken über Dinge,
über die wir auch ohne Computer längst hätten nachdenken müssen.

(Hans Schupp¹)

Gegenwärtig wächst die Verunsicherung bezüglich tradierter Inhalte und Methoden des Mathematikunterrichts im Gymnasium. Zum einen besteht vielfach ein Widerspruch zwischen Zielen und Ergebnissen des Unterrichts, zum anderen stellt sich das Problem einer neuerlichen Standortbestimmung, seitdem leicht transportierbare und finanziell erschwingliche Taschencomputer mit neuartigen Möglichkeiten auf dem Markt sind. Darüber hinaus stellt die internationale Untersuchung TIMSS² in Frage, ob der herkömmliche Mathematikunterricht die ihm nachgesagten Qualitäten besitzt.

Die Taschencomputer können nicht nur numerisch, sondern auch symbolisch rechnen, d.h. sie können nicht nur mit Zahlen umgehen, sondern auch mit Variablen und Termen. Damit verlieren kalkülorientierte Fertigkeiten weitgehend an Bedeutung. Die auf den Taschencomputern implementierten Computer-Algebra-Systeme können Terme umformen und Gleichungen lösen, können Funktionen differenzieren und Kurvendiskussionen durchführen. Der Unterricht in Mathematik wird also zum Umgang mit Kalkülen ein völlig neues Verhältnis finden müssen; auf keinen Fall kann er so kalkülorientiert bleiben wie bisher. Wünschenswerte Veränderungen des Mathematikunterrichts werden in den folgenden Kapiteln diskutiert.

Im Kapitel 2 geht es um allgemeine didaktische und methodische Fragen des Mathematikunterrichts: Welche Ziele hat der Unterricht, und anhand welcher Kriterien lässt sich eine Inhaltsauswahl legitimieren? Hier ist nicht nur der Beitrag zur Allgemeinbildung zu klären, sondern auch die Forderung nach genetischem, nach problemorientiertem und nach anwendungsorientiertem Mathematikunterricht zu begründen. Da die herkömmliche Unterrichtspraxis vielfach an der Vermittlung von Fertigkeiten orientiert ist, muss sich auch an der Unterrichtskultur Grundlegendes ändern.

Im Kapitel 3 werden die Überlegungen „Weg vom Kalkül, hin zum Sinn“ konkretisiert und anschließend Realisierungen eines anderen Unterrichts beschrieben. Unterrichtsbeispiele sind detailliert im Anhang dargestellt.

Die angestrebten notwendigen Veränderungen müssen durch begleitende Maßnahmen unterstützt werden; dazu werden in Kapitel 4 Hinweise gegeben.

Die Empfehlungen beleuchten die wichtigsten Aspekte wünschenswerter und notwendiger Veränderungen auf verschiedenen Abstraktionsebenen und in unterschiedlichen Blickrichtungen, unter Berücksichtigung ausgewählter fachdidaktischer Literatur, nach Anhörung von Experten und aus der Perspektive vielfältiger Unterrichtserfahrungen.

¹ Hischer [1994], S. 70.

² Baumert, Lehmann et al. [1997].

2 Leitlinien zur Themenauswahl und Unterrichtsgestaltung

2.1 Beitrag des Mathematikunterrichts zur Allgemeinbildung

Jedes Unterrichtsfach muss sich am allgemeinen Bildungsauftrag der Schule orientieren. Die inhaltliche Ausgestaltung des Bildungsauftrags wird durch die kulturellen und pädagogischen Traditionen der einzelnen Fächer mit geprägt. Insofern muss sich die Entwicklung von Zielen und Inhalten eines künftigen Mathematikunterrichts sowohl an Diskussionen des Bildungsbegriffs (Klafki, Heymann u. a.) als auch an denjenigen Fragen orientieren, die aus Problemen und Wertvorstellungen der bisherigen Tradition dieses Unterrichtsfachs entstehen (Lenné, Freudenthal, Wittenberg).

„Bildung“ hat bereits in sprachlicher Hinsicht eine zweifache Bedeutung: Sie meint sowohl einen Zustand als auch einen Prozess. Insofern ist „Bildung“ mehr als nur „Wissen“ und deutlich hiervon abzugrenzen. Dieser prozessuale Aspekt von „Bildung“, und damit auch von „Allgemeinbildung“³, wird in der gegenwärtigen allgemein- und mathematikdidaktischen Diskussion stets als bedeutsam hervorgehoben.

Hinsichtlich der Frage nach dem Beitrag des Mathematikunterrichts zur Allgemeinbildung entstand in den letzten Jahrzehnten eine umfangreiche fachdidaktische Literatur. Die Bildungsdiskussion wurde nicht nur aus der Perspektive des Mathematikunterrichts geführt, sondern unter Berücksichtigung von Bildungsaufgaben der Schule schlechthin und schließlich von Mathematik als Bezugswissenschaft, wobei in neuerer Zeit teilweise auch die Informatik als weitere Bezugswissenschaft herangezogen wurde.

Die folgende Aspektsammlung bezüglich des Beitrags des Mathematikunterrichts zur Allgemeinbildung ist eine bewusste Auswahl aus solcher Literatur. Sie orientiert sich in ihrer Struktur an dem Schema von Winter [1975]: Mathematik als Bezugswissenschaft (Spalte 1), Bildungsaufgaben der Schule (Spalte 2) und Beitrag des Mathematikunterrichts zur Allgemeinbildung (Spalte 3), wobei Bildungsaufgaben der Schule auch als Bildungsaufgaben des Mathematikunterrichts zu verstehen sind. Unterrichtliches Handeln muss sich daran messen lassen, inwieweit es im Einklang mit den Zielen der Spalten 2 und 3 steht. Es ist offensichtlich, dass die aufgeführten Ziele eine völlig andere Qualität als die Lernziele der 70er-Jahre besitzen, mit denen kleinschrittig ein abprüfbares Endverhalten beschrieben wurde.

Die Zuordnungen in der folgenden Übersicht können weder trennscharf noch vollständig sein.

³ Zum Begriff der Allgemeinbildung vgl. Klafki [1985].

Mathematik (Bezugswissenschaft)	Schule (Bildungsaufgaben)	Mathematikunterricht (Beitrag zur Allgemeinbildung)
Kreativität: Der Mensch als schöpferisches, erfinderisches, spielerisches Wesen		
Mathematik begegnet uns als <ul style="list-style-type: none"> • schöpferische Wissenschaft, • heuristische, induktive, experimentelle Wissenschaft, • Feld ästhetischer Betätigung und als • Spielraum des Denkens. 	Die Schule soll dazu beitragen, <ul style="list-style-type: none"> • schöpferische Kräfte zu entfalten, und zwar insbesondere <ul style="list-style-type: none"> • geistige Initiative, Phantasie, und Kreativität in Verbindung mit Selbstbewusstsein, Problemlösungssicherheit und Risikobereitschaft zu fördern, • eine ästhetische Bildung zu vermitteln, • subjektiv neuartige Ideen (der Schülerinnen und Schüler) zu akzeptieren und zu fördern, die im Rahmen des Unterrichtsstoffs sinnvoll sind und damit schließlich • kreatives Verhalten zu fördern. 	Der Mathematikunterricht dient <ul style="list-style-type: none"> • der Entwicklung von Handlungs- und Denkstrategien, • der Entwicklung heuristischer Strategien (Experimentieren, Probieren und Vergleichen als Erkenntnismethoden), • dem konstruktiven Umgehen mit Fehlern, • der Begriffsbildung als einem schöpferischen Tun und • der Verdeutlichung des ästhetischen Aspekts von Mathematik. Dazu liefert er Anlässe und Anleitung zu kreativem Handeln.
Erkenntnis: Der Mensch als nachdenkendes, nach Gründen, Einsichten suchendes Wesen		
Mathematik begegnet uns als <ul style="list-style-type: none"> • Prototyp für viele Wissenschaften, und zwar allgemein als <ul style="list-style-type: none"> • Mittel zur Erkenntnisgewinnung und dabei zugleich als • beweisende, deduzierende Wissenschaft und als <ul style="list-style-type: none"> • experimentelle Wissenschaft. 	Die Schule soll dazu beitragen, <ul style="list-style-type: none"> • rationales Denken zu fördern und dadurch • zum kritischen Vernunftgebrauch anzuleiten. 	Der Mathematikunterricht dient <ul style="list-style-type: none"> • dem Erwecken von Neugier und dem Herausfordern zum Fragen, • dem mathematischen Ordnen eines Feldes, insbesondere durch Axiomatisieren, Mathematisieren und Formalisieren, • der Förderung des logischen Denkens • der Bereitschaft zum Argumentieren, Kritisieren und Beurteilen, • dem Erlernen im Beweisen und im Begründen als einer Alternative zum Formalbeweis • der Vermittlung der platonischen Idee der Absolutheit mathematischer Erkenntnis und der Erfahrung, worin die der Mathematik eigene Gewissheit besteht. Hierzu muss Mathematik aspektreich vermittelt werden, wobei die Sinngebung und nicht die Strenge im Vordergrund stehen muss.

Mathematik (Bezugswissenschaft)	Schule (Bildungsaufgaben)	Mathematikunterricht (Beitrag zur Allgemeinbildung)
Anwendung: Der Mensch als gestaltendes, wirtschaftendes, Technik nutzendes, Verantwortung tragendes Wesen		
<p>Mathematik begegnet uns als</p> <ul style="list-style-type: none"> • Technologie <p>und damit insbesondere als</p> <ul style="list-style-type: none"> • anwendbare Wissenschaft <p>und</p> <ul style="list-style-type: none"> • Hilfswissenschaft für viele andere Wissenschaften, <p>denn sie ist</p> <ul style="list-style-type: none"> • Lieferant für transferierbare Methoden, • Vorrat von Modellen, <p>und schließlich ist sie</p> <ul style="list-style-type: none"> • eine unerschöpfliche Quelle von Problemen, <p>und sie wird benutzt als ein</p> <ul style="list-style-type: none"> • Hilfsmittel zur Optimierung materieller Gewinne. 	<p>Die Schule soll dazu beitragen,</p> <ul style="list-style-type: none"> • Lebensvorbereitung und Weltorientierung zu ermöglichen, und hierzu ist es erforderlich, • eine technologische Bildung zu vermitteln, <p>und zwar insbesondere</p> <ul style="list-style-type: none"> • Einsicht in die Mitverantwortlichkeit aller angesichts aktueller Schlüsselprobleme und damit zugleich Verantwortungsbereitschaft für die Folgen technischen Planens und Handelns im Sinne des homo faber zu entwickeln, <p>ferner ist hierbei</p> <ul style="list-style-type: none"> • vernetzendes Denken auszubilden <p>und damit das</p> <ul style="list-style-type: none"> • Verständnis für die Wirklichkeit zu fördern und zu nutzen. 	<p>Der Mathematikunterricht dient</p> <ul style="list-style-type: none"> • dem Mathematisieren, insbesondere soll Mathematik als Mittel zur Alltagsbewältigung erfahren werden, und dabei soll der Modellbildungsprozess zur Herstellung abstrakter Modelle realer Systeme und Probleme verdeutlicht werden. <p>Damit dient der Mathematikunterricht</p> <ul style="list-style-type: none"> • der Überwindung der Trennung von „reiner“ und angewandter Mathematik, • dem Erfahren der Anwendbarkeit von Mathematik und deren Grenzen <p>sowie</p> <ul style="list-style-type: none"> • der exemplarisch erlebten Unterscheidung zwischen Mathematik und dem „Rest der Welt“. <p>Daher dient er notwendig auch</p> <ul style="list-style-type: none"> • der Entfaltung von Verantwortungsbereitschaft mit Blick auf die Handlungskonsequenzen, • dem Kennenlernen fachübergreifender Aspekte, • dem vernetzenden Denken <p>und</p> <ul style="list-style-type: none"> • der propädeutischen Vermittlung von Begriffen und Verfahren, die im tertiären und beruflichen Bereich eine verbreitete Anwendung finden.

Mathematik (Bezugswissenschaft)	Schule (Bildungsaufgaben)	Mathematikunterricht (Beitrag zur Allgemeinbildung)
Sprache: Der Mensch als sprechendes, kommunizierendes Wesen		
Mathematik begegnet uns als <ul style="list-style-type: none"> • formale Wissenschaft, • Wissenschaft von den formalen Systemen, • Wirklichkeit „sui generis“ und • Sprache, die die ganze Welt versteht. 	Die Schule soll dazu beitragen, <ul style="list-style-type: none"> • die Sprachfähigkeit zu fördern. 	Der Mathematikunterricht dient <ul style="list-style-type: none"> • dem Übersetzen zwischen verschiedenen Sprachebenen, • dem Erkennen der Möglichkeiten und Grenzen der mathematischen Fachsprache, • der Förderung des sprachlichen Ausdrucksvermögens und des • Anschauungsvermögens (auch der räumlichen Vorstellung), • dem präformalen Arbeiten, • dem algorithmischen und kalkülhaften Arbeiten, • dem Erlernen des Formalisierens und <ul style="list-style-type: none"> • der Einsicht in die Strenge der Mathematik.
Individuum und Gemeinschaft: Der Mensch als wahrnehmendes, empfindendes, verantwortlich handelndes und soziales Wesen		
Mathematik begegnet uns als <ul style="list-style-type: none"> • zweiwertige Logik im Gegensatz zu der eher vagen, unscharfen, fließenden Logik der uns umgebenden Welt sowie als • stabiles System in einer Welt, die durch verunsichernden Wertewandel die Orientierung erschwert, und dieses System steht in einem <ul style="list-style-type: none"> • Wechselwirkungsprozess, nämlich einerseits durch Konsequenzen für das Individuum und die Gesellschaft und andererseits durch Einflüsse der Gesellschaft auf die Wissenschaft Mathematik, und zwar bezüglich sowohl der Akzeptanz ihrer Ergebnisse als auch der Unterstützung von Forschungen. 	Die Schule soll dazu beitragen, <ul style="list-style-type: none"> • die Persönlichkeit weiterzuentwickeln, • Verantwortung zu entfalten, und dabei insbesondere • das soziale Leben verantwortlich mit zu gestalten, • in Verständigung und Kooperation einzuüben, • das Schüler-Ich zu stärken, • eigene Wünsche und Neigungen erfahrbar zu machen, • zu Ausdauer, Geduld und Frustrationstoleranz zu erziehen, • Sachlichkeit, Objektivität, Toleranz, Selbständigkeit und Selbstverantwortung als sozial und individuell wichtige Tugenden zu entdecken, insgesamt hierzu <ul style="list-style-type: none"> • eine entsprechende Unterrichtskultur zu entwickeln. 	Der Mathematikunterricht soll <ul style="list-style-type: none"> • individuelle Lernprozesse beachten, • insbesondere das Schüler-Ich einbeziehen, etwa über die Wege: von singulären, subjektiven Sichtweisen hin zu regulären, intersubjektiven Sichtweisen, „Akzeptanz von Fehlern“; dabei soll er auch <ul style="list-style-type: none"> • den Bildungssinn eines Unterrichtsgegenstandes zum Gegenstand des Bildungsprozesses machen, und als Voraussetzung hierzu soll er • mit einer anderen Unterrichtskultur einher gehen und • durch Wahrhaftigkeit und Offenheit gekennzeichnet sein.

Mathematik (Bezugswissenschaft)	Schule (Bildungsaufgaben)	Mathematikunterricht (Beitrag zur Allgemeinbildung)
Kultur und Geschichte: Der Mensch als Wesen im kulturhistorischen Kontext		
Mathematik begegnet uns als <ul style="list-style-type: none"> • Sammlung von gelösten und ungelösten Problemen, die die Menschen in der Vergangenheit beschäftigten damit also als <ul style="list-style-type: none"> • kulturhistorisches bzw. kulturelles Gebiet und schließlich als <ul style="list-style-type: none"> • komplementäres Phänomen von Produkt und Prozess 	Die Schule soll dazu beitragen, <ul style="list-style-type: none"> • eine kulturhistorische Bildung zu vermitteln, die in der Stiftung kultureller Kohärenz, und zwar durch Vermittlung zentraler Ideen, und dem Kennen und Achten kultureller Werte besteht. 	Der Mathematikunterricht soll <ul style="list-style-type: none"> • bei der Planung und Durchführung kulturelle und historische Bezüge und Zusammenhänge als didaktische Aspekte berücksichtigen, hierzu soll er <ul style="list-style-type: none"> • das Erlebnis der Genese von Ideen und Begriffen ermöglichen, • durch (nicht notwendig historisch nachzeichnendes) Nachentdecken die Unterrichtsgegenstände in historische Kontexte einbetten und schließlich <ul style="list-style-type: none"> • Mathematik als eine Disziplin mit geistesgeschichtlichen Komponenten erfahrbar machen.

2.2 Fundamentale Ideen der Mathematik als curriculare Strukturierungshilfe — Wecken von Grundvorstellungen

Eine Forderung für einen zukünftigen Mathematikunterricht, der die genannten Bildungsziele verwirklicht, lautet, das Curriculum im Fach Mathematik stärker als bisher sinnstiftend zu strukturieren. „Rote Fäden“ und Vernetzungen sind einzufordern, um dem Schubladenlernen vorzubeugen und den Schülerinnen und Schülern eine sinnhafte und lernprozessfördernde Sequenzierung des Unterrichts zu ermöglichen.

In diesem Zusammenhang wird neuerdings wieder an den alten Begriff der **fundamentalen Ideen** angeknüpft, welche zu einer Zielorientierung für Prozesse der Bildungsplanung beitragen sollen. Der Begriff geht auf den amerikanischen Lernpsychologen Bruner zurück:

„... die Behauptung ..., dass die Grundlagen eines jeden Faches jedem Menschen in jedem Alter in irgendeiner Form beigebracht werden können. Diese Behauptung mag zunächst überraschend klingen, aber sie soll einen wesentlichen, beim Aufstellen von Lehrplänen oft übersehenen Punkt unterstreichen, nämlich dass die basalen Ideen, die den Kern aller Naturwissenschaft und Mathematik bilden, und die grundlegenden Themen, die dem Leben und der Dichtung ihre Form verleihen, ebenso einfach wie durchschlagend sind.“⁴

Der Begriff der fundamentalen Ideen ist zwar kontrovers diskutiert worden. Dennoch ist bei aller Verschiedenartigkeit der Auffassungen ein gemeinsamer Kern dessen erkennbar geworden, was „fundamentale Ideen der Mathematik“ sein können⁵:

Fundamentale Ideen der Mathematik

⁴ Bruner [1970], S. 14.

⁵ Im Sinne von Schweiger [1992] oder von Schwill [1993].

- sind aufzeigbar in der historischen Entwicklung der Mathematik,
- geben (zumindest partiell) Aufschluss über das Wesen der Mathematik,
- sind, gewissermaßen als Archetypen des Denkens, auch außerhalb der Mathematik auffindbar,
- sind hilfreich, curriculare Entwürfe des Mathematikunterrichts zu gliedern,
- sind geeignet, den Mathematikunterricht beweglicher und durchsichtiger zu gestalten.

Um nun fundamentale Ideen als curriculare Strukturierungshilfe für den Mathematikunterricht verwenden zu können, entsteht die Frage nach konkreten derartigen Ideen oder gar nach den fundamentalen Ideen schlechthin. Die didaktische Diskussion hierzu ist eher unübersichtlich und irritierend, z. T. widersprüchlich, und es gibt auch andere Bezeichnungen wie „universelle Ideen“ und „Kernideen“. Heymann [1996] gibt sechs solcher Ideen an, die er „zentrale Ideen“ nennt, nämlich

die Idee der Zahl, des Messens, des funktionalen Zusammenhangs, des räumlichen Strukturierens, des Algorithmus und des mathematischen Modellierens.

Diese Ideen erfüllen die Kriterien für fundamentale Ideen. Sie sind wegen ihrer Allgemeinheit und der zugleich überschaubaren Anzahl geeignet, in knapper Form grundsätzliche inhaltliche Aspekte des Mathematikunterrichts zu erfassen. Zugleich gibt es weitere Ideen, welche den Kriterien für fundamentale Ideen genügen, beispielsweise die Idee der Zahldarstellung, die Idee der Figur bzw. Form oder die Idee der Iteration, welche sich aber im Konkretheitsgrad von denen Heymanns unterscheiden. Sie erscheinen allerdings gerade wegen ihrer Konkretheit viel unterrichtsnäher.

Daher werden hier die fundamentalen Ideen auf zumindest zwei verschiedenen Ebenen mit unterschiedlichem Konkretisierungsgrad angesiedelt:

- auf allgemeiner Ebene: Zahl, Messen, funktionaler Zusammenhang, räumliches Strukturieren, Algorithmus und möglicherweise weitere.
- auf konkreterer Ebene: Änderungsverhalten, Mittelwertbildung, Optimieren, Zahldarstellung, Annäherung, Iteration und Rekursion, mathematisches Modellieren und Simulieren, Zufall, Figur–Form–Muster, Koordinatisieren, Proportionalität und Ähnlichkeit, Symmetrie usw.

Diese fundamentalen Ideen bieten Möglichkeiten zur vielfältigen Verknüpfung. So ist eine fundamentale Idee ein Gliederungselement für Inhalte (vertikal), aber zusätzlich sind auch Verknüpfungen zwischen fundamentalen Ideen zwingend (horizontal). Beispielsweise stützt sich die Idee des Änderungsverhaltens insbesondere auf die Ideen des Messens und des funktionalen Zusammenhangs.

Im Mathematikunterricht selber muss es auf konkreteren Ebenen darum gehen, über die Behandlung geeigneter Themen, welche durchaus zu großen Teilen in dem bisherigen Themenkanon vorhanden sind, Grundvorstellungen (s. unten) zu solchen Begriffen, Verfahren und Argumentationsmustern zu wecken, die mit diesen Ideen zusammenhängen. Eine Hierarchisierung, bzw. lineare Strukturierung ist nicht möglich, da vielfältige Beziehungen und Verflechtungen vorliegen. So werden hier Begriffe, Verfahren und Argumentationsmuster zu den fundamentalen Ideen bewusst ohne Strukturierung genannt:

- Begriffe:
Ableitung, Term, Zahl, Zufall, Abbildung, Variable, Funktion, Gleichung, Grenzwert, Kurve, Symmetrie, Wahrscheinlichkeit, Vektor, Gerade, Punkt, Kongruenz, Matrix, Maß, Modell, Ähnlichkeit, Prognose, Integral, Differenzierbarkeit, Stetigkeit, Folge, Winkel, Äquivalenz, Lösung, Stammfunktion, Mittelwert, Quotient, Proportionalität, „wahr – falsch“, „Definition – Satz – Beweis“, Koordinaten, „Konvergenz – Divergenz“ usw.
- Verfahren:
Ableiten, Lösen von Gleichungen, Lösen, Integrieren, Dividieren, Approximieren, Konstruieren, Hypothesen testen, Optimieren, Iterieren, Koordinatisieren usw.

- Argumentationsmuster:
„je – desto“, Hypothesen bilden, „wenn – dann“, Schlussregeln, im Besonderen das Allgemeine sehen, Gegenbeispiele suchen, Fälle unterscheiden usw.

Einerseits bilden fundamentale Ideen auf beiden Konkretheitsebenen eine curriculare Strukturierungshilfe für die Planung und Durchführung von Mathematikunterricht, indem sie indirekt über die Auswahl von Themen wirksam werden, ohne selbst explizit im Vordergrund stehen zu müssen. Andererseits können die Bildungsziele eines solchermaßen strukturierten Mathematikunterrichts nur dann erreicht werden, wenn die fundamentalen Ideen auch selbst Gegenstand des Unterrichts werden – zumindest in einer Reflexionsphase.

Schließlich macht die historische Dimension der fundamentalen Ideen deutlich, dass es notwendig und nützlich ist, kulturhistorische Aspekte der Genese von Begriffen, Problemen und Ideen in den Unterricht einfließen zu lassen, diesen damit auch vertikal zu strukturieren und damit eine historische Verankerung zu organisieren, die zugleich eine Verankerung von Begriffen im Sinne der Lernpsychologie ist.

Iteration als Beispiel für eine fundamentale Idee

Die Iteration als fundamentale Idee erfüllt die oben genannten Kriterien:

- Die historische Entwicklung der Mathematik läßt sich unmittelbar aus den Namen einiger iterativer Verfahren wie Heron–Verfahren oder Newton–Verfahren aufzeigen.
- Iterieren ist eine typische Vorgehensweise der Mathematik.
- Lebensweltliche Bemerkungen wie „Was ich morgen mache, hängt davon ab, was ich heute mache“ oder „Wenn ich nicht genau weiß, wie es geht, probiere ich und verbessere“ zeigen, dass Iterationen als Archetyp des Denkens auch außerhalb der Mathematik auffindbar sind.

Weil Iterationen in unterschiedlichen Teilbereichen (Horizontalkriterium) und unterschiedlichen Niveaustufen (Vertikalkriterium) des Mathematikunterrichts auftreten, sind sie tragfähig, um curriculare Entwürfe zu gliedern und damit den Mathematikunterricht beweglicher und durchsichtiger zu machen.

In Bezug auf das Vertikalkriterium lassen sich drei unterschiedliche Stränge denken, die sich jeweils durch alle Jahrgangsstufen hindurch ziehen:

- Lösen von Gleichungen (Heron, Newton),
- Iteration geometrischer Abbildungen,
- Über diskrete Wachstumsmodelle zu Systemen von Differenzgleichungen (Modellbildung).

Neben der Verwendung von Iterationen als Hilfsmittel zur Problemlösung sollten diese in einem zweiten Schritt auch als eigenständige Objekte untersucht und klassifiziert werden, etwa durch Betrachtung des Langzeitverhaltens.

In Bezug auf das Horizontalkriterium lassen sich bei der Behandlung von Iterationen vielfältige Querbezüge zu anderen fundamentalen Ideen und Begriffen herstellen. So erfährt der Funktionsbegriff durch die Gegenüberstellung des Zuordnungsaspektes ($y = f(x)$; $x_n = f(n)$; $x_n = f(x_{n-1})$) und des Objektcharakters von $f(x)$ (z.B. $f(f(x))$) eine Ausschärfung, ebenso der Begriff der Lösung durch Vergleich von numerischen und analytischen Lösungen; die Behandlung von Fraktalen vertieft Symmetrie und Symmetrisierung; Selbstähnlichkeit, als Invarianz gegenüber Größenveränderung betrachtet, stellt einen Bezug zu den anderen – tradierten – Invarianzen her; Differenzgleichungen zeigen eine alternative Behandlung von Änderungsverhalten auf, und ihre Weiterführung zu dynamischen Systemen stellt ein gehaltvolles Beispiel für Modellbildung dar, die selbst wiederum iterativen Charakter hat. Die Behandlung von Iterationen fördert somit wesentlich den Aspektreichtum von Mathematik.

In der – ohne Rechner – aufwendigen Berechnung von Iterationen und der damit einhergehenden schweren Zugänglichkeit der Besonderheiten (Langzeitverhalten) liegt der wesentliche Grund dafür, dass Iteration – obwohl fundamentale Idee – in bisherigen Curricula nur singuläres Additivum war. Heute können die schnelle Verfügbarkeit und variable Darstellungsart von Daten sowie die Variationsmöglichkeit von Parametern experimentelle und heuristische Verfahren fördern; prägend ist ein gleichberechtigtes Wechselspiel von numerischen, grafischen und analytischen Verfahren. Damit ermöglicht die Behandlung von Iterationen, nicht zuletzt durch den – zumindest auf Schulniveau – nicht möglichen analytischen Abschluss, das Aufbrechen erstarrter methodischer Gepflogenheiten.

Grundvorstellungen

Als Mittler zwischen den fundamentalen Ideen und den konkreten unterrichtlichen Themen sind die Grundvorstellungen zu Begriffen, Verfahren und Argumentationsmustern anzusehen. Im Grundvorstellungsbegriff lassen sich sowohl sachlogische als auch lernpsychologische Aspekte erfassen, indem Beziehungen zwischen mathematischen Inhalten und individueller Begriffsbildung beschrieben werden⁶:

- Der Sinn eines Begriffes wird durch Anknüpfung an bekannte Sach- oder Handlungszusammenhänge bzw. Handlungsvorstellungen konstituiert.
- Entsprechende (visuelle) Repräsentationen bzw. „Verinnerlichungen“, die operatives Handeln auf der Vorstellungsebene ermöglichen, werden aufgebaut.
- Die Fähigkeit zur Anwendung eines Begriffs auf die Wirklichkeit wird angestrebt, indem die entsprechenden Struktur in Sachzusammenhängen erkannt oder indem das Sachproblem mit Hilfe der mathematischen Struktur modelliert wird.

Die Orientierung an den fundamentalen Ideen ergibt den normativen Aspekt der Grundvorstellungen. So sind z.B. angemessene Grundvorstellungen von Änderungsverhalten, Steilheit, Anstieg und Annäherung als Voraussetzung für einen sinnhaften Umgang mit dem Ableitungsbegriff notwendig. Oder: Zu einem sinnhaften Umgehen mit Termen gehören angemessene Grundvorstellungen von Variablen, Gleichheit, Äquivalenz, Symmetrie usw.

Lernpsychologisch nimmt die Grundvorstellungsidee klar einen konstruktivistischen Standpunkt ein. Grundvorstellungen wachsen, entwickeln sich, ergänzen sich gegenseitig und haben daher einen dynamischen Charakter. Dieser zweite, deskriptive Aspekt fordert die Einbeziehung der Schülerinnen und Schüler als Subjekte in den reflektierenden Umgang mit ihren Verstehensprozessen. Grundvorstellungen entwickeln sich über subjektive Erfahrungsbereiche⁷. Letztere sind bereichsspezifisch, nicht hierarchisch geordnet, bilden sich auf Grund von Handlungen und deren Sinnzusammenhang, und sie sind nicht bereichsunabhängig aktivierbar.

Sieht man das Lernen von Mathematik als Ausbilden von Grundvorstellungen zu Begriffen, Verfahren und Argumentationsmustern, so ergeben sich Konsequenzen sowohl in der curricularen als auch in der unterrichtlichen Vorgehensweise: Angemessene Grundvorstellungen können sich nur bei hinreichender Aspektvielfalt entwickeln. Somit sollte ein Curriculum nicht an streng linear und hierarchisch geordneten Inhalten ausgerichtet sein, sondern muss sich an sinnhaften Strukturierungsaspekten wie denen der fundamentalen Ideen orientieren.

Unterrichtlich lässt sich ein reines Vermittlungskonzept nicht rechtfertigen. Die deskriptive Erfassung von individuellen Vorstellungen von Schülerinnen und Schülern und deren konstruktive Aufarbeitung zur Ausbildung von angemessenen Grundvorstellungen muss neben dem Vermitteln eines sicheren Umganges mit mathematischen Symbolen und Modellen zentral für den Unterricht werden. Die Rolle der Lehrenden verschiebt sich verstärkt von der eines reinen Experten des Fachwissens zu der eines Experten des Lernprozesses.

⁶ Vom Hofe [1995], S. 97.

⁷ Nach Bauersfeld in Dörfler [1985], S. 11 ff.

2.3 Die beiden Aspekte der Mathematik

Mathematik ist nicht nur ein reines Spiel des Geistes, sondern bezieht ihre Motive und ihren Sinn in gleichberechtigter Weise auch aus außermathematischen Problemen. In diesem Sinne wird die Mathematik von zwei Aspekten geprägt:

- Mathematik als **Sprache** mit innermathematischen Begründungs- und Exaktheitsstandards,
- Mathematik als Sprache zur **Beschreibung von Welt** (Anwendung von Mathematik, Modellierungsaspekt).

Das Charakteristische der Mathematik liegt darin, dass sie einerseits – als erfahrungsunabhängige Wissenschaft – ihre spezifischen Theorien- und Begriffsbildungen hat, andererseits aber ein historisch immer bedeutsamer und umfangreicher werdendes Instrument zur Beschreibung, Prognose und Gestaltung außermathematischer Gegenstände ist. Hierbei hat sich immer wieder gezeigt, dass beide Aspekte sich gegenseitig durchdringen.

Dass ein Curriculum Fragen, Probleme und Inhalte beider Aspekte und ihrer Durchdringung in zentraler Weise thematisieren muss, hat neben mathematischen auch pädagogische Gründe:

Jede Beschreibung von Welt stellt eine Reduktion dar.

Jede Beschreibung von Welt ist menschengemacht und könnte eventuell auch ganz anders sein.

Jede Beschreibung von Welt ist unsicher.

Dieser Sachverhalt wird durch die Begriffe „Modell“ und „Modellierung“ erfasst. Zu erkennen, dass jede Beschreibung von Welt das Verwenden oder Bilden eines Modells ist, gehört zu den nicht immer eingelösten Bildungswerten des Gymnasiums.

So, wie der Biologe, der das Verhalten einer Population beschreibt, der Physiker, der die unbelebte Natur untersucht, der Historiker, der geschichtliche Ereignisse aus Quellen rekonstruiert und deutet, der Musiker und Maler, der Gefühle durch Musik oder Malerei ausdrückt, Modellbildung betreibt, so ist auch das „Gießen“ eines Sachverhaltes in Formeln (Mathematisierung) eine spezifische Art des Modellbildens. Nie ist aber das, was beschrieben wird, identisch mit dem Original.

Um bei den Lernenden eine angemessene Vorstellung bzgl. des Modellhaften jeder Erkenntnis zu erzeugen, ist es notwendig, Unterrichtssequenzen zu gestalten, in denen der Zyklus (Realität → Realmodell → mathematisches Modell → innermathematische Lösung → Interpretation und Überprüfung an der Realität) iterativ durchlaufen wird, in denen es also zu einem ständigen Wechselspiel von Mathematik und Realität kommt, so dass das reduktive Element von Modellierungen und ihre prinzipielle Unabgeschlossenheit deutlich werden. Nur lose verbundene, statische Anwendungen fertiger Modelle wirken wenig sinnstiftend, sie stellen nur einen, wenn auch wichtigen Teil des Modellbildungsprozesses dar. Reflexionen der in diesem Zusammenhang auftretenden innermathematischen Inhalte können und sollten dann Ausgangspunkt für innermathematische Theoriebildungen sein, deren Ergebnisse dann wieder u. U. weitere bzw. bessere Modellierungen ermöglichen können. Darüber hinaus ist allerdings zu beachten, dass mathematische Theoriebildung auch einen Bildungswert an sich darstellt, sie bedarf somit nicht zwingend der vorgängigen Verankerung in außermathematischen Fragestellungen. Ihr Nutzen bzgl. solcher Fragen sollte aber in einem zweiten Schritt deutlich gemacht werden.

Kalküle (Termumformungen, Lösen von Gleichungen usw.) gehören zu beiden Aspekten und spielen von daher sicher eine zentrale Rolle; die Möglichkeit der Kalkülierung ist ja gerade ein Spezifikum der Mathematik. Das Finden von Kalkülen gehört somit zu den bedeutsamen Inhalten des Mathematikunterrichts. Ein Mathematikunterricht aber, der die Verwendung von Kalkülen unter rein syntaktischen Gesichtspunkten in den Vordergrund stellt und zum Schwerpunkt macht, ermöglicht nie die hinreichende Erfahrung auch nur eines der beiden zentralen Aspekte; die Dominanz des Syntaktischen führt zu einer Entkopplung von Semantik und Pragma-

tik. Ein Mathematikunterricht, in dem das Abarbeiten von Kalkülen dominiert, verfehlt damit sein Ziel, er macht wenig oder gar keinen Sinn.

Strukturbildend für Unterricht darf nicht eine Hierarchie von Kalkülen sein, denen inner- und außermathematische Inhalte untergeordnet sind – quasi als Anwendung von Kalkülen –, sondern umgekehrt: Leitfäden müssen innermathematische Probleme und Theoriebildung und das sukzessive „Einfangen“ bedeutsamer Probleme der außermathematischen Realität sein. Taschencomputer mit ihren grafischen, numerischen und algebraischen Möglichkeiten unterstützen dabei die zentrale Behandlung beider Aspekte, weil ihre entlastende Funktion bzgl. des syntaktischen Bereichs (Termumformungen usw.) das verstärkte Herausarbeiten des semantischen und pragmatischen Gehalts mathematischen Handelns ermöglichen.

2.4 Angestrebte Fähigkeiten, Einstellungen und Verhaltensweisen der Schülerinnen und Schüler

Mit den inhaltlich bezogenen Beiträgen des Mathematikunterrichts zur Allgemeinbildung (siehe Kap. 2.1) sind angestrebte Fähigkeiten, Einstellungen und Verhaltensweisen der Schülerinnen und Schüler verknüpft. Die nachfolgende Zusammenstellung enthält sowohl charakteristische Eigenschaften mathematischen Tuns als auch fundamentale Aspekte menschlichen Lebens:

Kreativität: Der Mensch als schöpferisches, erfinderisches, spielerisches Wesen

Schülerinnen und Schüler sind fähig und dazu bereit, Situationen zu erkunden, zu variieren, fortzusetzen und zu transferieren. Dabei können sie Beziehungen, Muster, Strukturen entdecken, Hypothesen aufstellen und Alternativen entwickeln, selbständig Lösungswege und Beweise finden sowie mit Fehlern kreativ umgehen.

Erkenntnis: Der Mensch als nachdenkendes, nach Gründen, Einsichten suchendes Wesen

Schülerinnen und Schüler sind fähig und dazu bereit, zu fragen und zu begründen. Dabei können sie logisch argumentieren, Beweise prüfen, Inhalte und Methoden bewerten und Hypothesen testen. Sie können subjektiv bedingte von objektiven Sichtweisen unterscheiden, und sie sind bereit, sich an Vereinbarungen (Definitionen) zu halten.

Anwendung: Der Mensch als gestaltendes, wirtschaftendes, Technik nutzendes, Verantwortung tragendes Wesen

Schülerinnen und Schüler sind fähig, reale Situationen der Umwelt zu mathematisieren, indem sie die Situation etwa durch Aufnahme von Daten erfassen und beschreiben, ein mathematisches Modell bilden, Lösungsverfahren auswählen und durchführen sowie die sich ergebenden Schlussfolgerungen anhand der Ausgangssituation interpretieren und überprüfen.

Sprache: Der Mensch als sprechendes, kommunizierendes Wesen

Schülerinnen und Schüler sind fähig, Sachverhalte und Gedanken zu verbalisieren, zu präzisieren, zu visualisieren oder zu formalisieren.

Individuum und Gemeinschaft: Der Mensch als wahrnehmendes, empfindendes und soziales Wesen

Schülerinnen und Schüler sind dazu bereit, eine Fragehaltung zu entwickeln und sind motiviert, sich anzustrengen und Lösungen zu suchen. Sie sind bereit, eigene Denkvorgänge anderen zu vermitteln und mit ihnen weiterzuentwickeln, dabei anderen zuzuhören und andere Auffassungen zu akzeptieren, sich an Übereinkünfte zu halten sowie mit eigenen und fremden Fehlern vernünftig umzugehen. Ferner sind sie dazu bereit, Verantwortung für sich und andere zu übernehmen und Toleranz zu üben. Die Erziehung zur Selbständigkeit ist ein Ziel auch des Mathematikunterrichts.

Kultur und Geschichte: Der Mensch als Wesen im kulturhistorischen Kontext

Schülerinnen und Schüler sind sich der kulturellen und historischen Verankerung der Mathematik bewusst, weil

sie im Unterricht die Genese von Begriffen und Verfahren sowie eine historische Verankerung von Situationen erfahren haben.

Die beiden letztgenannten Qualifikationen sind eher dem affektiven Bereich zuzuordnen, während zum kognitiven Bereich die ersten vier ausgeführten Fähigkeiten gehören. Letztere sind eng verbunden mit den folgenden geistigen Grundtechniken; mit ihnen verschafft sich der Mensch Wissen, Ordnung und Übersicht:

- Wissenserwerb und Wissensverwaltung,
- Klassifizieren, Spezialisieren, Generalisieren,
- Ordnen, Sortieren, Strukturieren,
- Analogisieren, divergentes Denken,
- Analysieren, Synthetisieren.

Für die Gestaltung eines Mathematikunterrichts, der die aufgeführten Qualifikationen und die mit ihnen verbundenen verhaltensbezogenen Ziele optimal fördert, sollen Unterrichtsmethoden und -formen gewählt werden, die den gewünschten Lernprozess unterstützen.

2.5 Bedingungen für den Lernprozess

Wurden bis jetzt Grundsätze zur curricularen Strukturierung (fundamentale Ideen, Grundvorstellungen, die beiden Aspekte der Mathematik) benannt, so geht es nunmehr darum, wie diese unter Beachtung der wünschenswerten Fähigkeiten der Lernenden verwirklicht werden können. Dazu gehört eine Optimierung der Unterrichtsform und eine veränderte inhaltliche Gestaltung.

2.5.1. Erfahrung statt Belehrung

Entdeckender Unterricht

Zuzuhören und fremde Gedankengänge zu verarbeiten, ist sicher ein wichtiges Unterrichtsziel. Wenn jedoch Schülerinnen und Schülern mathematische Kenntnisse nur „vermittelt“ werden, werden sie in eine Passivität gedrängt, die dem übergeordneten Bildungsziel „Erziehung zur Mündigkeit“ nicht entspricht.

Die Lernenden verfügen über vielfältige Vorerfahrungen. Sie können und sollen als Aktive an den Stoff herangeführt werden. Ihre Entdeckungsfreude und ihre Kreativität müssen gefördert werden. Sie sollen Mathematik selber erfahren können und nicht über sie belehrt werden. Dies führt zu einer Individualisierung des Lernens: Wie kann sich ein Lernprozess anders als individuell ereignen?

Es ist auf Dauer nicht wirkungsvoll, Schülerinnen und Schülern alles vorab kleinschrittig erklären zu wollen. Der Lernprozess ist effektiver, wenn die Lernenden Problemlösungen als Überwindung erlebter Schwierigkeiten erfahren.

Immer wieder wird betont, dass in der Schule das Lernen gelernt werden müsse. Dieses Unterrichtsziel wird durch rein demonstrierenden Mathematikunterricht nicht erreicht.

Obwohl sich selbstverständlich nicht der gesamte Stoff in entdeckendem Unterricht behandeln lässt, so müssen gleichwohl die Phasen entdeckenden Lernens ausgebaut werden.

Produktive Lernumgebungen

Wenn der Mathematikunterricht einseitig auf reproduzierendes und reorganisierendes Denken ausgerichtet ist, wird zwar das rezeptive Lernen gefördert, das angestrebte produktive Denken aber eher verhindert. Produktives Lernen entsteht nicht von selbst. Daher sind produktive Lernumgebungen zu schaffen. Hierzu gehört bei-

spielsweise, dass man für den Satz des Pythagoras nicht nur ein einmaliges Verständnis anstrebt und ihn dann nur noch anwendet, sondern für den Satz ein vielfältiges Verständnis auf unterschiedlichen Ebenen zu erreichen sucht. Ebenso gehört dazu, Schülerinnen und Schülern Zeit und Muße für eigene Denküben zu lassen. Viel unverstandener Stoff blockiert die Entfaltung von Selbsttätigkeit.

Produktive Lernumgebungen sind ohne Eigentätigkeit undenkbar. Sie führen zu Selbständigkeit und Eigenverantwortlichkeit der Schülerinnen und Schüler. Ferner sind produktive Lernumgebungen unabdingbar für angestrebte Transferleistungen. Transfer stellt sich nicht von selbst ein, auch nicht, wenn die Situation, von der er ausgehen soll, gut verstanden wurde. Transfer muss bewusst geübt werden.

Wider das Schubladendenken, für die Aspektvielfalt

Fehlende Vorkenntnisse der Schülerinnen und Schüler könnten Lehrkräfte dazu verleiten, das „Schubladendenken“ zu intensivieren. Hierdurch wird vielen Lernenden die Möglichkeit zur Sinnfindung entzogen. Die Einteilung des Stoffes in Schubladen wirkt sich auf das Verständnis, auf das Interesse und auch auf die Fähigkeit der Lernenden zur Modellierung negativ aus. Schülerinnen und Schüler haben unnötig Schwierigkeiten, wenn sie ständig rein mechanisch Verfahren lernen müssen, die alle voneinander isoliert sind und die deshalb auch kaum miteinander zu verknüpfen sind.

Deshalb ist der Stoff vielfältig zu vernetzen und darf auf keinen Fall segmentiert bleiben. Gleichwohl sind bei der Erstbegegnung Schwierigkeiten zu isolieren. Eine Vernetzung nehmen Schülerinnen und Schüler nicht selbstständig vor. Im Gegenteil: Lerninhalte bleiben an den Kontext der Erstbegegnung gebunden. Kognitive Konflikte werden nicht wahrgenommen, wenn die Inhalte in unterschiedlichen Kontexten vorliegen. Ein wesentlicher Aspekt des Lernens besteht darin, solche Kontextgrenzen zu überwinden.

Es sind Übungen zu entwickeln, die neue Zusammenhänge erkennen lassen, die Kontexte variieren, die Verbindungen zu anderen Inhalten des Mathematikunterrichts herstellen. Insbesondere entsteht durch die Anreicherung mit mathematischen Querbezügen und durch die bewusste Betonung von Aspektvielfalt die Möglichkeit, innermathematisch motivieren zu können. Die hierbei auftretenden Schwierigkeiten und Probleme der Schülerinnen und Schüler können eine fruchtbare Grundlage für effektiven Unterricht sein.

Die Lernenden müssen erfahren, was sie können.

Im Unterricht soll den Lernenden deutlich werden, welche Lernzuwächse erreicht wurden und welche Fähigkeiten ausgebildet sind. Hierdurch werden Selbstbewusstsein und Zutrauen der Schülerinnen und Schüler gefördert. Dies wirkt sich bei neuen Herausforderungen positiv aus.

Konstruktiver Umgang mit Fehlern

Jeder Mathematiker weiß aus eigener Erfahrung, dass aus Fehlern Erkenntnisse gewonnen werden können. Wenn Lehrkräfte gegenüber Fehlern allein die Einstellung vertreten, dass sie zu vermeiden seien, wird ein wichtiger Erkenntniszugang verschlossen. Fehlerhafte Gedanken der Schülerinnen und Schüler sind ernst zu nehmen. Offen und konstruktiv darauf einzugehen, ist für die Lernenden hilfreicher, als fehlerhafte Gedanken bloß mit „Falsch!“ abzuqualifizieren.

Die Geschichte lehrt, dass Fehler relativ sein können. Aus heutiger Sicht sind die Elemente von Euklid nicht makellos, viele Schlüsse von Euler sind ohne zureichende syntaktische Grundlage, Leibniz rechnete mit seinen Differentialen so, wie es den Schülerinnen und Schülern verboten wird usw. Auch Inhalte der heutigen Hochschulmathematik werden vermutlich einmal als lückenhaft, womöglich gar in Teilen als fehlerhaft gelten.

2.5.2 Weniger Syntax, mehr Semantik!

Wider das formale syntaktische Üben

Durch reproduktives Abarbeiten von „Aufgabenplantagen“ werden keine Fähigkeiten gefördert, höchstens instabile und lokal begrenzte Fertigkeiten. Dies zeigt sich, wenn der Kontext der Aufgabenplantagen nur leicht variiert wird. Durch die Überbetonung des Syntaktischen kann sogar das inhaltliche Denken behindert werden; dieses zeigt sich z.B. daran, dass nach langen Übungsphasen zu quadratischen Gleichungen auch $x^2 = 4$ mit der Lösungsformel gelöst wird. Sinnentleerte Kalkülübungen klären keine Schwierigkeiten der Lernenden, sondern wiegen diese in falscher Sicherheit.

Mathematik erschöpft sich nicht in Syntax

Mathematik besteht nicht nur aus Termumformungen bzw. dem Abarbeiten von Kalkülen. Die Verengung auf den syntaktischen Aspekt liefert ein falsches Bild von Mathematik. Auch im nicht anwendungsorientierten Mathematikunterricht geht es um Inhalte. Deshalb ist auf die inhaltliche Bedeutung mathematischer Begriffe einzugehen. Beispiel: Die Frage nach der vielfältigen Bedeutung des Differentialquotienten ist viel wichtiger als das Beherrschen der Ableitungsregeln.

Die Fähigkeit zum sinnvollen und verständigen Gebrauch des mathematischen Formalismus stellt sich nicht von selbst ein; hierzu muss in vielfältiger Weise angestiftet und angeleitet werden.

Schwierigkeiten mit Syntax und Semantik⁸

Syntaktisch gleich aussehende Terme haben keineswegs immer gleiche semantische Bedeutung; dieses muss thematisiert werden. Die Bedeutung der Terme ist nicht selbsterklärend; so werden häufig die gleichen Zeichen als Operationszeichen und als Bestandteil von Zahlennamen benutzt. Generell können Formeln sowohl Prozesse als auch Resultate von Prozessen darstellen. Mit Buchstaben werden keine Objekte bezeichnet, sondern den Objekten zugeordnete Zahlen.

Zu beachten ist auch, dass Schülerinnen und Schüler ganz unterschiedliche Grundvorstellungen zu Variablen haben:

- Sie können für unbekannte Zahlen stehen. Beispiel: $x + 1 = 2$; gesucht ist x .
- Sie können Platzhalter für Zahlen sein. Beispiel: $a + b = b + a$.
- Sie können bedeutungslose Zeichen sein, mit denen nach gewissen Regeln verfahren werden darf. Beispiel: Umformung von $a + b = c$ zu $a = c - b$.
- Sie können Veränderliche sein. Beispiel: Wenn sich x verdoppelt, halbiert sich y .

Die Abgrenzung der Aspekte ist nicht scharf. Häufig sind mehrere gleichzeitig zu beachten, und Termumformungen können nicht auf einen einzigen reduziert werden. Die Verschiedenheit der Grundvorstellungen bietet die Möglichkeit, das Schillern des Variablenbegriffs methodisch fruchtbar zu machen. Es ist sinnvoll, im Unterricht bewusst die Aspekte zu wechseln, beispielsweise Formeln funktional zu deuten. Beispiel: Es sei $a = b + c$. Wie ändert sich a , wenn b wächst und c konstant bleibt? Dass von höherer Warte aus diese verschiedenen Aspekte vereinheitlicht werden können, hilft Schülerinnen und Schülern wenig.

Auch zu Funktionen gehören unterschiedliche Grundvorstellungen. Mitunter ist der statische Aspekt der elementweisen Zuordnung bedeutungstragend, in anderen Situationen ist es mehr der dynamische Aspekt (Beispiel: Einer Änderung von x entspricht eine Änderung von $f(x)$).

Man kann sich beim Lösen von Gleichungen auf das unbekannte Objekt x beziehen (wenn $2x = 8$ ist, ist 8 das Doppelte der gesuchten Zahl, also ist $x = 4$), man kann sich aber auf einer höheren Ebene auch auf die Gleichung beziehen (man darf beide Seiten einer Gleichung durch 2 teilen). Naturgemäß wird die erste Erklärung

⁸ Nach Malle [1993].

viel besser verstanden. Das bedeutet nicht, auf Erklärungen der zweiten Art zu verzichten; diese haben aber einen abstrakteren Charakter. Die Fachsprache muss sich allmählich aus der Schülersprache entwickeln.

Beim Umformen algebraischer Ausdrücke und damit auch beim Lösen von Gleichungen erweist es sich als sinnvoll, zwischen syntaktischen Umformungsregeln und heuristischen pragmatischen Regeln (Beispiel: x isolieren) zu unterscheiden (beispielsweise, indem man zunächst ziellos und spielerisch umformen lässt). Auch diese Unterscheidung nehmen Schülerinnen und Schüler häufig nicht selbständig vor.

2.5.3. Zum Aufbau von Verständnis

Verallgemeinerungen entstehen langsam

Viele mathematische Begriffe entstehen durch Verallgemeinerung. Damit ein Begriff gut gebildet wird, muss – gerade in der Anfangsphase – häufig ein intensives Wechselspiel zwischen der konkreteren und der abstrakteren Ebene stattfinden. Wird zu schnell abstrahiert, so verselbständigt sich das Formale; die Schülerinnen und Schüler lernen dann nicht durch Einsicht, sondern durch Anpassung. Zu schnelle Abstraktion verwehrt den Lernenden den inhaltlichen Zugang zur Mathematik.

Kognitive Konflikte setzen Kognitionen voraus

Häufig ist zu beobachten, dass Schülerinnen und Schüler ein Lösungsverfahren rezeptartig und unreflektiert anwenden. Allenfalls wird gefragt: „Habe ich das Verfahren richtig angewendet?“, kaum „Habe ich das richtige Verfahren angewendet?“ oder gar „Ist das erhaltene Ergebnis sinnvoll und aussagekräftig?“ Das Fehlen von Reflexion führt dazu, dass keine Kognitionen aufgebaut werden. Dann lassen sich diese Schülerinnen und Schüler auch nicht durch kognitive Konflikte ansprechen. Sie warten darauf, dass Leistungsstarke die für sie unverständlich gebliebenen Probleme lösen, um daraus resultierende Lösungsverfahren wiederum „blind“ anwenden zu können. Gleichwohl kann der Aufbau kognitiver Konflikte in vielen Fällen ein wirkungsvolles Mittel zur Motivation sein.

2.5.4. Genetischer Mathematikunterricht

Wider die einseitige Betonung der Methoden zuungunsten der Objekte

Mathematikunterricht soll interessante Objekte thematisieren, zu deren Untersuchung geeignete Methoden entwickelt werden. Der Unterricht verfehlt sein Ziel, wenn das Einüben von Methoden in den Mittelpunkt gestellt wird und aus Zeitmangel nur triviale Objekte bearbeitet werden.

Wider das Lernen auf Vorrat

Es hat sich als sinnlos erwiesen, vorab alle diejenigen Methoden zu entwickeln und deren Gebrauch einzuüben, die später einmal benutzt werden sollen. Ein solcher Unterricht erweist sich weder als interessant noch als effektiv, da die Methoden beim Studium der Objekte dann doch nicht zur Verfügung stehen. Sinnvoller ist es, die notwendigen Methoden nach Bedarf zu entwickeln. Dies schließt nicht aus, den Lehrstoff methodisch zu strukturieren, um die Überlagerung von Schwierigkeiten zu vermeiden.

Der Mathematikunterricht muss genetisch vorgehen

Der Mathematikunterricht ist häufig rein stofflich geordnet und strukturiert. Einsicht in innermathematische Stoffstrukturierung setzt aber voraus, den Stoff gut zu kennen. Dies ist naturgemäß bei Schülerinnen und Schülern nicht der Fall, insbesondere nicht während der Erstbegegnung. Wird der Stoff trotzdem rein innermathematisch strukturiert, werden Lernende massiv daran gehindert, selber aktiv ihr mathematisches Wissen zu strukturieren. Deshalb muss der Mathematikunterricht genetisch-entwickelnd vorgehen.

Die Inhalte des Mathematikunterrichts sind in die Ideengeschichte einzubinden. Die Irrationalität der Diagonalenlänge ist zum Beispiel kein kurioses und uninteressantes Faktum, sie muss vielmehr an dieser Stelle bisherige Überzeugungen der Lernenden erschüttern. Chancen, exemplarisch historische Bezüge herzustellen, sind zu nutzen.

Wenn ein Bereich erkundet ist, empfiehlt sich eine Rückschau; dabei wird der Stoff systematisch strukturiert. Dies Hinzukommen an Systematik muss als Erkenntnisgewinn erfahren werden. Hierzu sollte auch gehören, fundamentale Ideen und heuristische Strategien zu thematisieren.

2.5.5. Problemorientierung

Zur Entwicklung der Denkfähigkeit gehört es, dass Schülerinnen und Schüler lernen, selbst Probleme zu finden: „Kultur ist Reichtum an Problemen“ (Egon Friedell). So ist auch in der Mathematik ein gutes Problem (fast) mehr wert als seine Lösung. Den Lernenden werden zu häufig Fragen und Probleme nur von Lehrenden vorgegeben; dadurch werden sie in die Passivität gedrängt.

Wege zu guten Problemen sind im Prinzip bekannt: Fragen werden variiert, erweitert, Probleme erzeugen Anschlussprobleme. Auch offene Aufgaben können Schülerinnen und Schüler zum Aufbau einer Fragehaltung anregen.

Beim problemorientierten Unterricht ist darauf zu achten, dass die sich anschließenden Suchprozesse nicht zu eng angelegt sind und dass die Lernenden Gelegenheit haben, ihr bereits erworbenes Wissen auf Brauchbarkeit zu überprüfen. Obwohl das Einüben konvergenter Denkprozesse unverzichtbar ist, ist zum Lösen von Problemen divergentes Denken erforderlich.

Werden Probleme aus der außermathematischen Welt bearbeitet, so sind die Lösungen zwar im rein innermathematischen Kontext richtig oder falsch, im Welt-Kontext aber höchstens angemessen oder unangemessen.

2.5.6. Anwendungsorientierung

Lernende sind an der Welt interessiert. Ihre Neugier verkümmert im Mathematikunterricht, wenn er diesem Interesse nicht entgegenkommt. Daher gehören auch Themen, die nicht genuin mathematisch sind, in den Mathematikunterricht, und zwar nicht nur als Stundeneinstiege. Dabei ist zu berücksichtigen, dass sich nicht alle Schülerinnen und Schüler gleichermaßen für alle Gegenstände der Welt interessieren. Der Bezug zur Welt bleibt sinnlos, wenn der Mathematikunterricht nicht den konkreten Erfahrungsraum, nicht das Weltbild bereichert.

Bei der Behandlung nicht genuin mathematischer Themen entsteht ein Übersetzungsproblem zwischen der natürlichen Sprache und der Sprache der Mathematik. Die gleichzeitige Verarmung und Bereicherung, die beim Übergang von einer gemeinsprachlichen zu einer formalsprachlichen Beschreibung stattfindet, kann und muss Schülerinnen und Schülern erfahrbar gemacht werden. Diese unverzichtbare Erfahrung gehört zu den konkret zu benennenden Elementen von Bildung.

Ebenso unverzichtbar ist die Beurteilung des Einsatzes von Mathematik in der Welt. Solche Beurteilung ist notwendig, um unkritischer Wissenschaftsgläubigkeit vorzubeugen. Ein wichtiges Beispiel ist die Beurteilung von Prognosen. Schülerinnen und Schüler müssen die jedweder Prognose innewohnende Problematik erfahren haben. Anderenfalls wird das übergeordnete Bildungsziel „Anleitung zum kritischen Vernunftgebrauch“ verfehlt. Auch hier handelt es sich um ein Element von Bildung.

2.5.7. Konflikt der Ideale

Dem zu geringen Stellenwert sowohl des schulischen Lernens
als auch der Wertschätzung des Lehrberufs in der Gesellschaft,
der nicht ausreichenden Wahrnehmung der gesellschaftlichen Verantwortung

für Bildungsanstrengungen und dem Bedeutungsverlust von Bildung muss von allen am Lernprozeß Beteiligten (und nicht nur von den Lehrern) eine „Kultur der Anstrengung“ entgegengesetzt werden.⁹

Eltern sowie Lernende verlangen vorrangig nach Lehrerklärungen. Diese haben im Unterrichtsgeschehen sicher auch ihre Berechtigung. Allerdings dürfen dadurch die Schülerinnen und Schüler nicht in eine passive Rolle gedrängt werden, sondern müssen weiterhin zu eigenständigem Denken geführt werden. Jeder Lernprozeß setzt jedoch Eigenaktivität und die Bereitschaft, lernen zu wollen, voraus. Lernen erfordert Anstrengung und Durchhaltevermögen. Deshalb müssen alle am Lernprozeß Beteiligten eine neue Anstrengungskultur entwickeln. Eine scheinbar schülerfreundliche Schule ohne entsprechende Qualitätsanforderungen ist schülerunfreundlich, weil sie die Lernenden nicht auf die Zukunft vorbereitet.

Alle in 2.5 beschriebenen Gesichtspunkte der Unterrichtsgestaltung erfassen Angebote, die Lernbereitschaft zu fördern und individuelle Lernschwierigkeiten zu verringern. Es ist jedoch nicht immer möglich, alle Schülerinnen und Schüler zu erreichen. Umso mehr ist es notwendig, dass sich die Lernenden altersentsprechend ihres eigenen Beitrags zum Lernprozeß bewußt werden.

Eltern sowie Schülerinnen und Schüler müssen über die angestrebten Ziele des Mathematikunterrichts im Hinblick auf die Bildungsziele des Gymnasiums informiert werden.

⁹ Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht [1997], S. 441.

3 Zu Veränderungen des Unterrichts

3.1 Veränderung von Inhalten und Methoden – Abkehr von der Kalkülorientierung

Es ist davon auszugehen, dass Taschencomputer in den Mathematikunterricht Eingang finden werden und damit der klassische kalkülorientierte Mathematikunterricht nicht mehr durchführbar ist. Inhalte und Methoden können sich dann nicht weiterhin am Abarbeiten von Kalkülen orientieren, sondern müssen sich stärker als bisher am Aufbau geeigneter Grundvorstellungen orientieren.

Ging es im Kapitel 2.5 um Veränderungen des Mathematikunterrichts, die unabhängig von der Existenz von Taschencomputern sinnvoll sind, so werden in diesem Kapitel Veränderungen diskutiert, die insbesondere durch die Verfügbarkeit von Hard- und Software wichtig geworden sind. Dabei steht zunächst die Frage im Mittelpunkt: Wie viel Termumformung braucht der Mensch? Das heißt: Wie intensiv muss das Abarbeiten von Kalkülen geübt werden?

Termumformungen sind in der Mathematik nur ein Hilfsmittel. Verständnis von Mathematik wird nicht durch die Fähigkeit, Terme umformen zu können, erreicht. Deshalb darf Mathematikunterricht nicht überwiegend aus Übungen zu Termumformungen bestehen. Formalisierung und damit das Anwenden von Kalkülen soll eine Hilfe für wahres Verständnis sein, aber kein Ersatz. Ein kalkülorientierter Mathematikunterricht täuscht Sinn lediglich vor¹⁰.

Andererseits gilt: Wer Termumformungen nicht versteht, dem bleiben weite Bereiche der Mathematik verschlossen. Er kann auch nicht sinnvoll mit einem Computer–Algebra–System umgehen. Termumformungen müssen deshalb gelehrt und geübt werden. Was Taschencomputer können, müssen Schülerinnen und Schüler prinzipiell auch können; die Einschränkung ist wesentlich. Damit Computer sinnvoll eingesetzt werden können, brauchen sie sinnvolle Eingaben. Das Ergebnis, das mit dem Computer gewonnen wird, muss verstanden werden können. Das Aufstellen und Interpretieren von Termen wird deshalb ein ganz wesentliches Unterrichtsziel bleiben und an Bedeutung gegenüber dem Umformen von Termen stark gewinnen. Dazu tritt die auch bei maschineller Termumformung weiterhin notwendige Kompetenz, Termstrukturen zu erkennen und Vorstellungen von angemessenen Möglichkeiten der Termumformung zu haben. Das Verständnis des Wesentlichen bei Termumformungen wird durch das Abarbeiten von Aufgabenplantagen nicht gefördert, sondern eher behindert. Die Schülerinnen und Schüler brauchen ein Grundverständnis der Kalküle und elementare Sicherheit im Umgang mit ihnen. Was das konkret bedeutet und welche Mindeststandards unverzichtbar sind, ist derzeit ein offenes Problem.

Beim Gebrauch von Taschencomputern besteht dieselbe Gefahr wie bei der klassischen Kalkülorientierung, dass nämlich Schülerinnen und Schüler Aufgaben „lösen“ können, ohne den mathematischen Hintergrund verstanden zu haben. Eine Möglichkeit, dieser Gefahr zu entgehen, besteht darin, Probleme nicht nur symbolisch (d.h. termorientiert) zu behandeln, sondern auch graphisch und auch numerisch, und die Zusammenhänge zwischen diesen drei Zugangsarten immer wieder herauszuarbeiten. Dass der klassische Mathematikunterricht oft kalkülorientiert war, hatte seinen Grund darin, dass etwa in der Analysis das Herstellen von hinreichend feinen Wertetabellen und von Graphen sehr mühsam war und sich allein der analytische Zugang als relativ mühelos erwies. Mit dem Einsatz von Computern hingegen ist der numerische und der graphische Zugang problemlos geworden; zwar ist er nicht erkenntnissichernd, wohl aber erkenntnis- und verständnisfördernd. Insofern bieten Taschencomputer eine neue Chance, auch schwächeren Schülerinnen und Schülern durch die Eröffnung vielfältiger Zugänge zu helfen. Dass Probleme mit dem Kalkül nicht mehr im Vordergrund stehen müssen, kann sich positiv auf den Mathematikunterricht auswirken. Die Zeit kann für mathematisch sinnvollere Fragestellungen genutzt werden: Wo kommen die Terme her? Welche Schlüsse können schon ohne den „Ap-

¹⁰ Davis / Hersh [1986], S. 287.

parat“ der Kurvendiskussion gezogen werden? Ist nicht bei bestimmten Problemstellungen eine Wertetabelle oder ein geplotteter Graph schon hinreichend aussagekräftig? Warum interessieren die besonderen Punkte? Was sagen sie aus? Wie kann man sie ermitteln, wenn die üblichen Kriterien versagen? Es lassen sich interessante Phänomene thematisieren, ohne die Angst haben zu müssen, dass alles an der unzureichenden Termumformungskompetenz der Schülerinnen und Schüler scheitert. Die anspruchsvolleren Unterrichtsziele wie kreatives Denken, Darstellen und Interpretieren, Problemlösen, Kommunizieren, Argumentieren, Anwenden (siehe Kapitel 2) können nun besser verwirklicht werden.

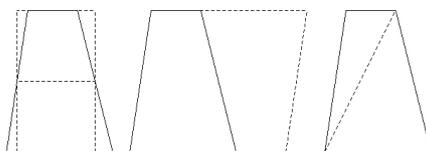
Der Mathematikunterricht soll verstärkt seinen Ausgangspunkt in breiten, noch nicht mathematisierten Kontexten der Erfahrungswelt nehmen. Begriffe der Alltagswelt wie Optimieren oder Approximieren werden schrittweise exaktifiziert und verändern dadurch unter Umständen ihren semantischen Gehalt; zwischen Begriffen der mathematisierten Welt wie Integral, Funktion, Äquivalenz und der Alltagswelt müssen Bezüge hergestellt werden. Geschieht dies nicht, können Schülerinnen und Schüler mit diesen Begriffen nur in der engen Welt der Kalkülorientierung arbeiten. Stattdessen sollen sie mit diesen Begriffen in weiten Bereichen verständlich umgehen können. Die Fähigkeit zum Transfer ist ein wichtiges Ziel des allgemein bildenden Mathematikunterrichts, das nicht einfach zu erreichen ist und deshalb besonders geübt werden muss.

Für den Mathematikunterricht ergibt sich:

- Mathematikunterricht muss sich häufiger mit Problemen der Welt auseinander setzen und nicht nur mit der simplifizierten, mathematisierten Version. Das Simplifizieren ist sinnvoll und muss geübt werden. Der Ausgangspunkt ist die Welt, und die Welt ist auch der Zielpunkt.
- Kalkülorientierung führt zu einer Schwerpunktbildung in der Algebra. Sie bewirkt daher, dass die unterrichtlichen Anteile von Stochastik und Geometrie verringert werden. Diese Inhalte sollen jedoch im Sekundarbereich I gleichanteilig mit der Algebra behandelt werden, da sie spezifische Möglichkeiten zur Verfolgung der Ziele des Mathematikunterrichts beinhalten.
- Auch innerhalb der Algebra dürfen Terme nicht durchgängig kalkülorientiert unterrichtet werden. Es ist zu klären, welcher Term welchen Sachverhalt beschreibt und welcher Sachverhalt zu welchem Term passt. Beispiel: Die Trapezfläche hat den Inhalt

$$A = m \cdot h = \frac{(g_1 + g_2) \cdot h}{2} = \frac{g_1 \cdot h}{2} + \frac{g_2 \cdot h}{2}.$$

Diese Formeln sind durch Termumformungen auseinander hervorgegangen. Den Termen können folgende geometrische Konfigurationen zugeordnet werden.



Andere algebraische Umformungen liefern wiederum andere geometrische Konfigurationen und umgekehrt.

- Terme als Beschreibungsmittel sowie die Interpretation von Termen müssen viel stärker in den Mittelpunkt des Mathematikunterrichts gerückt werden. Das Umformen von Termen wird stark an Gewicht verlieren. Kurz gesagt: Weg vom Kalkül, hin zum Sinn!
- Die vorangegangenen Ausführungen werden Konsequenzen für die Gestaltung und Bewertung der Lernkontrollen haben. Es ist sinnvoll, den verständigen Umgang mit Algorithmen zu prüfen und nicht nur das Abarbeiten der Algorithmen. Kommentare und Erörterungen werden stärker zu gewichten sein.

3.2 Erste Ergebnisse aus Schulversuchen zum Einsatz von Taschencomputern im Mathematikunterricht

Im Schuljahr 1996/97 hat in drei Gymnasien ein halbjähriger Schulversuch zum Thema „Einsatz des Taschencomputers

TI 92 im Mathematikunterricht des Gymnasiums“ stattgefunden. Die Geräte wurden in einer der beteiligten Schulen in mehreren Lerngruppen für die Dauer von jeweils etwa vier Wochen, in den beiden anderen im gesamten Beobachtungszeitraum jeweils in nur einer Lerngruppe eingesetzt. Durch unterschiedliche Konzepte wurde gewährleistet, dass die Beobachtungen neben dem vollintegrierten auch den teilintegrierten Einsatz des Rechners berücksichtigten.

Die Untersuchungen, die nicht wissenschaftlich begleitet wurden, basieren auf Beobachtungen der beteiligten Lehrkräfte und den Auswertungen von (nicht normierten) Schülerfragebögen. Aufgrund der kleinen Stichprobe und des kurzen Untersuchungszeitraumes lassen sich nur wenige auf alle Lerngruppen übertragbare Beobachtungen feststellen, andere sind eher subjektiv oder durch unterschiedliche Bedingungen des Lernprozesses geprägt.

In den **Kurzzeit**anwendungen (4 Wochen) wurden von allen beteiligten Lehrkräften folgende Beobachtungen gemacht:

- Schülerinnen und Schüler haben vielfach Probleme, den Rechner sinnvoll zu nutzen. Die Schwierigkeiten einer fehlerfreien Bedienung (sowohl der Hardware als auch der Software) überlagern häufig die Möglichkeiten eines effektiven Einsatzes zur Lösung von Problemen.
- Je früher die Lernenden mit einem entsprechenden Gerät im Unterricht konfrontiert werden, umso geringer sind Akzeptanzprobleme. Dies liegt auch mit daran, dass in den unteren Jahrgangsstufen nur mit einem stark eingeschränkten Befehlssatz des Algebrasystems gearbeitet wird.

Bei den Untersuchungen in den drei Kursen, in denen die Geräte **langfristig** ausgeliehen wurden, ergaben sich folgende Aspekte, die auch durch Beobachtungen über den Zeitraum des Unterrichtsversuches hinaus gestützt werden:

- Beim Einsatz des Taschencomputers werden einerseits Defizite im mathematischen Verständnis klarer aufgezeigt, da Schülerinnen und Schüler sich nicht mehr auf die schematische Anwendung von Kalkülen zurückziehen können. Andererseits können durch seinen Einsatz Mängel in der Kalkülkompetenz (Lösen von Gleichungen, korrektes Differenzieren und Integrieren) ausgeglichen werden, so dass diese nicht mehr von dem Auffinden der Problemlösung ablenken. Leistungsstarken Schülerinnen und Schülern eröffnen sich durch das neue Werkzeug neue Perspektiven, die sie zu kreativem Umgang mit Mathematik anregen können, beide Gruppen können dadurch von dem Rechner deutlich profitieren. Bei Lernenden mit bisher befriedigenden Leistungen wird durch den Einsatz des Rechners die Tendenz ihrer Leistungsfähigkeit deutlicher: Diejenigen, die gute Ideen, aber Schwächen haben, die entsprechenden Formeln zu verarbeiten, werden durch das Werkzeug entlastet und können ihre Lösungsideen eher umsetzen. Diejenigen, deren Leistung sich primär auf sicheren Umgang mit dem Kalkül stützt, werden durch veränderte Anforderungen im Unterricht und in den Klausuren diese Leistungsstärke nicht mehr so zur Geltung bringen können.
- Durch verstärkten Einsatz des Rechners werden die kalkülbezogenen Fertigkeiten der Schülerinnen und Schüler geringer. Dies wirkt sich aber nach den bisherigen Beobachtungen im Leistungskurs nicht auf die Fähigkeit aus, inner- und außermathematische Probleme unter Rechneinsatz zu lösen. So kann gerade

der Rechner dazu anregen, der äußeren Form nach unterschiedliche Terme mit klassischen Mitteln auf Äquivalenz zu überprüfen. Auch sind Lösungswege häufig kreativer, da Termumformungen weniger Probleme aufwerfen. Im Grundkurs dagegen überlagern bei einigen Lernenden die Probleme mit der Rechnerbedienung den semantischen Bereich zunächst so stark, dass ihre Fähigkeit, Probleme zu lösen, zurückgeht. Dies führt auch zu Akzeptanzproblemen des Rechners.

- Durch den Einsatz des Rechners kann das Unterrichtsgespräch über mathematische Inhalte in den Vordergrund treten. Unterschiedliche Ansätze und Lösungsstrategien, deren Vergleich nicht mehr durch fehlerhafte Termumformungen belastet ist, fordern zu Fragen und Diskussionen heraus, die weit über das bisher Übliche hinausgehen. Es kann jetzt angestrebt werden, das Warum ins Zentrum gemeinsamer Betrachtung von Lösungswegen zu stellen. Das Gespräch über die Sache wird auch in andersartigen Dokumentationen deutlich, die durch längere Textpassagen mit mathematischen Begründungen gekennzeichnet sind. Diese veränderte Qualität der Reflexion inner- und außermathematischer Probleme im Unterricht kann durch den Einsatz des Taschencomputers motiviert und gefördert werden.
- Innermathematische Fragestellungen können vielschichtiger untersucht werden (z.B. Interpolation und Extrapolation, unterschiedliche Ansätze der Integralrechnung, numerische Verfahren) und außermathematische Anwendungen sind erst durch den Einsatz des Taschencomputers sinnvoll geschlossen zu bearbeiten. Reales Datenmaterial muss nicht manipuliert werden, sondern kann in der vorgelegten Form weiterverarbeitet werden, und reale Problemstellungen können so mit mathematischen Modellen sinnvoll behandelt werden. Für die Schülerinnen und Schüler kann der Sinn des eigenen Handelns deutlicher werden, da sie zu realen Problemen Lösungsmodelle und Strategien weitgehend selbständig entwickeln können.
- Aufgrund der Vielzahl von Variationsmöglichkeiten (graphisch, numerisch, symbolisch) können die Schülerinnen und Schüler selbständig zu neuen Fragestellungen kommen. Sie erhalten eine Fülle von Anschauungsmaterial, wodurch sich die Durchdringung des Stoffes deutlich vertieft.
- Geschlechtsspezifische Unterschiede im Umgang mit dem Rechner wurden umso deutlicher, je später eine Erstbegegnung mit diesem neuen Werkzeug stattfand. Bei Schülerinnen und Schülern der Jahrgangsstufen 7 und 8 waren keine Unterschiede erkennbar, das neue Werkzeug wurde in gleicher Weise zur Lösung, Kontrolle und zu weiterführenden Experimenten eingesetzt. In den Jahrgangsstufen 9 bis 11 wurden Unterschiede dann deutlich, wenn unterschiedliche Vorerfahrungen mit Computern vorhanden waren: Jungen arbeiteten häufiger spielerisch und experimentell mit dem Rechner und hatten weniger Probleme beim Handling, Mädchen strebten eher einen effektiven Einsatz an. Bei Schülerinnen und Schülern der Grundkurse waren diese Rollen noch deutlicher ausgeprägt, im Leistungskurs waren dagegen geschlechtsspezifisch unterschiedliche Zugänge zum Rechner nicht erkennbar.

Der teilintegrierte Ansatz beim Einsatz des Taschencomputers hat sich nach den vorliegenden Untersuchungen nur sehr eingeschränkt bewährt, da Schülerinnen und Schüler sich nicht in dem gewünschten Umfang mit dem Rechner vertraut machen können. Der lokale Einsatz in einzelnen ausgewählten Unterrichtsstunden kann aufgrund mangelhafter Kenntnisse in der Benutzung des Taschencomputers eher zu negativen Auswirkungen führen. Erst der vollintegrierte Ansatz, der den Einsatz des Taschencomputers jederzeit im Unterricht, zu Hause und in den Klausuren vorsieht, bewirkt, dass der Rechner als natürliches Werkzeug im Mathematikunterricht angesehen wird. Häufig kann beobachtet werden, dass der Umfang des direkten Rechneinsatzes im Unterricht im Laufe der Zeit eher rückläufig ist. Dieser scheinbare Widerspruch erklärt sich daraus, dass Themen und Inhalte des Unterrichtes und der Klausuren sich von ergebnis- und kalkülorientierten Aufgaben hin zu inner- und außermathematischen, von konvergenten zu divergenten Problemen orientieren. Dabei ist der Rechner im Hintergrund als mächtiges Werkzeug stets latent vorhanden, so dass der Unterricht in vielen Bereichen von „Berechnungen“ (wie Differenzieren, Integrieren, Lösen von Gleichungen, Termumformungen) entlastet wird

und damit den Blick auf zentrale Fragestellungen freigibt. Der Taschencomputer allein bewirkt noch keine Verbesserung des Mathematikunterrichts.

3.3 Überblick über wesentliche Elemente der im Anhang aufgeführten Unterrichtsbeispiele

Die Frage, wie die entwickelten Leitlinien zur Planung und Gestaltung des gymnasialen Mathematikunterrichts umgesetzt werden können, soll an sechs Beispielen, davon fünf zum herkömmlichen Thema „Quadratische Gleichungen und Funktionen“, exemplarisch beantwortet werden.

In jeder dargestellten Einheit lernen die Schülerinnen und Schüler, Strategien, Techniken und Argumentationsmuster bewußt zu entwickeln. Die im Anhang dokumentierten Beispiele zeigen, wie die fundamentalen Ideen der Zahl, des Messens, des funktionalen Zusammenhangs, des Algorithmus', des Modellierens, der Symmetrie usw. thematisiert werden und die Grundvorstellungen zu den Begriffen Variable, Term, Funktion, Graph, Gleichung usw. vielfältig zu wecken bzw. auszuformen sind.

Die ersten fünf Unterrichtsbeispiele belegen, dass auch bei unterschiedlichen Zugängen zum Gegenstand „Quadratische Gleichungen“ die didaktische Strukturierung nach den in Kapitel 2 dargestellten fundamentalen Ideen und die Umsetzung der dort ausgeführten didaktisch-methodischen Forderungen immer zentrales Anliegen sind.

Unterrichtsbeispiel 6 hat ein anderes Thema; es konzentriert sich u.a. auf den Einsatz von Taschencomputern. In der Beschreibung dieser Unterrichtseinheit sind Erfahrungen aus dem Unterrichtsversuch zum Einsatz des Taschencomputer TI 92 im Mathematikunterricht eingebunden.

Unterrichtsbeispiel 1: Ein Weg zur Lösung quadratischer Gleichungen

Das Unterrichtsprojekt zur Einführung der quadratischen Gleichungen vertraut der innermathematischen Motivation und zielt direkt auf die Erarbeitung effektiver Lösungsstrategien und -verfahren. Quadratische Gleichungen werden nicht isoliert, sondern im Zusammenhang mit bekannten und höhergradigen Gleichungen gesehen. Dabei sollten sowohl in der Einstiegs- als auch in der Ausbauphase die Schülertätigkeiten in der ganzen Lerngruppe methodische Priorität erhalten. Es geht darum, Grundvorstellungen von der Variablen, von Gleichungen, von Näherungslösungen und Kalkülen zu festigen und zu verstärken. Durch die Einbeziehung von Rechnern soll mathematisches Verständnis herausgefordert und verstärkt werden. Um diese künftig notwendige Aspektverlagerung zu konkretisieren, enthält das Unterrichtsprojekt 10 abschließende Problemvorschläge. In einer später anschließenden Unterrichtseinheit müssen dann (angewandte) Probleme vorgelegt werden, bei deren Lösung die erarbeiteten Strategien eingesetzt oder weitere Lösungswege erschlossen werden.

Unterrichtsbeispiel 2: Eine problemorientierte Behandlung quadratischer Funktionen und Gleichungen

Eine problemorientierte Behandlung quadratischer Funktionen und Gleichungen zeigt, dass im Sachgebiet „Quadratische Gleichungen“ nicht nur fundamentale Ideen und Begriffe der Funktionenlehre neu miteinander verknüpft werden, sondern z.B. auch den oft formal geübten binomischen Formeln ebenso ein Nutzen zugewiesen wird wie dem Lösungsverfahren für quadratische Gleichungen. Das dargestellte Unterrichtsbeispiel zeigt, dass handlungsorientiertes Vorgehen auch in weniger motivierten Klassen produktives Arbeiten fördert. Ein leicht verständliches Problem gewährt Lerngruppen Freiräume für eigenständige Arbeit und regt zu Fragen an, die vielfältig bereits erlernte grundlegende mathematische Ideen, Begriffe, Verfahren und Argumentationsmuster aufrufen: *Messen, Zahl, Kongruenz, Änderungsverhalten, Annäherung, Variable, Term, Funktion, Gleichung, Symmetrie, Lösen, Äquivalenz, Iterieren, Schlussregeln usw.* Zentrales Anliegen ist die Durchdringung der Begriffe Variable, Term, Funktion, Gleichung und Lösung und deren Beziehungen.

Die Schülerinnen und Schüler erfahren, dass der Mathematikunterricht nicht die Aneignung isolierter Wissens-elemente zum Ziel hat, sondern Grundvorstellungen zu bekannten Begriffen, Verfahren und Argumentations-mustern genutzt werden, um neue Begriffe, Verfahren und Argumentationsmuster zu erschließen. Hier wird versucht, das oft beklagte rezeptive Verhalten vieler Schülerinnen und Schüler positiv zu verändern.

Unterrichtsbeispiel 3: Die Behandlung quadratischer Funktionen und Gleichungen unter dem Aspekt der Optimierung

Diese Unterrichtseinheit basiert auf der fundamentalen Idee des Optimierens. Ausgehend von einem fiktiven Problem werden unterschiedliche lineare und quadratische Optimierungsaufgaben ins Zentrum der Betrachtung gestellt, deren algebraische Lösung schließlich auf die Behandlung quadratischer Funktionen und Gleichungen führt. Das zentrale Problem, die Suche nach dem flächengrößten halb offenen Rechteck, führt auf ein quadratisches Optimierungsproblem, das auf unterschiedlichen Betrachtungsebenen gelöst wird.

Zentraler Aspekt ist das Kennenlernen von heuristischen Methoden auf verschiedenen Ebenen. Ausgehend von Strategien bei geometrischen Mustern können die Probleme durch Koordinatisieren in eine Ebene transportiert werden, in der sie sowohl numerisch als auch analytisch bearbeitet werden können. Geometrische Verfahren haben dabei dieselbe Bedeutung wie tabellarische oder algebraisch-analytische. Symmetrieaspekte der geometrischen Figuren werden gegen algebraische und numerische abgewogen und mit ihnen verknüpft. Mit Hilfe von interaktiven Geometrieprogrammen können auch dynamische Aspekte beim Problemlösen visuell aufbereitet werden. Durch die Einbettung in eine fiktive Geschichte werden die Schülerinnen und Schüler angeregt, auch an ungewöhnliche Lösungsverfahren heranzugehen und sie auszuprobieren. Dadurch soll das kreative Potential der Schülerinnen und Schüler stärker für den Mathematikunterricht aktiviert werden.

Unterrichtsbeispiel 4: Der goldene Schnitt

In der Unterrichtsgeschichte zum Goldenen Schnitt treffen mehrere fundamentale Ideen aufeinander wie z.B. die *Idee der Zahl, des Messens und des Algorithmus*. Es wird versucht, Grundvorstellungen zu Begriffen wie *Zahl, Term, Dividieren, Lösung, Iteration, Folge, Grenzwert* zu entwickeln.

Insbesondere aber beschreibt die Unterrichtsgeschichte schwerpunktmäßig eine veränderte Sichtweise der Lehrenden im Mathematikunterricht. Die Besonderheit des unterrichtlichen Vorgehens liegt nicht in methodischer oder inhaltlicher Form, sondern in der Sensibilität im Umgehen mit dem Unterrichtsgeschehen, in einer Unterrichtskultur, welche nicht von Vermittlung, sondern von Aufklärung geprägt ist. Dadurch kann die Lehrperson Signale der Schülerinnen und Schüler im Unterrichtsgeschehen wahrnehmen und interpretieren, welche oberflächlich als „Fehler“ deklariert werden könnten. Diese werden konstruktiv aufgegriffen und führen die Lehrperson und die Lernenden in vorher nicht absehbare Bereiche und Tiefen des inhaltlichen Stoffes.

Unterrichtsbeispiel 5: Stickstoffdüngung und Mathematik

In der Langzeitaufgabe zum Thema „Stickstoffdüngung und Mathematik“ finden sich fundamentale Ideen wie *Messen, funktionaler Zusammenhang und räumliches Strukturieren* wieder. Die Weiterentwicklung von Grundvorstellungen zu *Variable, Term, Funktion, Gleichung, Kurve, Modell, Prognose, Mittelwert, Koordinaten* und zu Verfahren wie *Approximieren, Optimieren und Hypothesentesten* oder zu Argumentationsmustern wie *Koordinatisieren, Gegenbeispiele suchen und Proben durchführen* wird deutlich.

Vornehmlich stellt die Langzeitaufgabe aber eine methodische Alternative im Mathematikunterricht dar. Die Organisation in einer Gruppenaufgabe über einen längeren Zeitraum hinweg unterstützt vor allem eigenverantwortliches Tun der Schülerinnen und Schüler und fördert Fähigkeiten wie argumentieren, sich kreativ verhalten, experimentieren, verbalisieren, Informationssysteme und technische Hilfsmittel nutzen.

Der Fachübergreif, hier durch Texte und Messwerte aus der Realität ausgelöst, vermittelt nicht nur eine fachliche Erweiterung und Einbettung, sondern es ist zur Lösung des Problems notwendig zu explorieren, die Modellierung an der realen Problemstellung zu messen und zu optimieren. Dadurch ergibt sich ein Sinnkontext für die Handlungen der Schülerinnen und Schüler, welcher für den Lernprozess von großer Bedeutung ist.

Die Bedeutung der neuen technischen Hilfsmittel wie Computer oder Taschencomputer wird hier insbesondere beim Visualisierungs- und Explorationsprozess deutlich, da ohne diese Hilfsmittel die Problemstellung kaum sinnvoll zu bewältigen wäre.

Unterrichtsbeispiel 6: Interpolation mit Splines unter Einsatz von Taschencomputern

Als Alternative zur gängigen Kurvendiskussion wird in diesem Beispiel eine spezielle Form von Kurvenanpassung an gegebene Daten vorgestellt. Hierbei wird sowohl auf den Aspekt der Modellbildung als auch auf innermathematische Fragestellungen eingegangen. Bedingt durch den Einsatz eines Computer-Algebra-Systems stehen die rechenaufwendigen Verfahren zur Bestimmung von Lösungsmengen bei großen linearen Gleichungssystemen nicht im Vordergrund, vielmehr geht es um Entwicklung, Variation und Reflexion entsprechender Lösungsstrategien. Der Vergleich mit herkömmlichen ganzrationalen Interpolationspolynomen, die bei ungünstigen Daten schnell zum Oszillieren neigen, ist wesentlicher Bestandteil dieser Unterrichtsreihe. Erst der Einsatz von (Taschen-)Computern ermöglicht es, umfangreiche Datenmengen bzw. Realdaten so zu verarbeiten, dass das zentrale Problem nicht aus dem Blick verschwindet. Die Konzentration auf wesentliche Elemente der Modellbildung wird durch die Entlastung im Bereich der syntaktischen Fähigkeiten (Termumformungen, Lösen von Gleichungssystemen) deutlich verstärkt.

4 Hinweise zu Maßnahmen

4.1 Lehrerbildung

Entsprechend der zuvor dargelegten Notwendigkeit, die Akzente im Mathematikunterricht grundlegend zu ändern, müssen auch in beiden Phasen der Lehrerbildung die Schwerpunkte deutlich anders gesetzt werden. Die Ausbildung der Lehrerinnen und Lehrer dient in ihren beiden Abschnitten dem Erwerb einer umfassenden beruflichen Kompetenz. Damit die Lehrkräfte den sich wandelnden Anforderungen ihres Lehramtes gerecht werden und den Erziehungs- und Bildungsauftrag der Schule erfüllen können, muss neben der Verbesserung der allgemeinen beruflichen Qualifikation sowohl im fachwissenschaftlichen als auch im fachdidaktischen Bereich eine deutlich höhere aktive Kompetenz erreicht werden.

Der Erwerb aktiver Kompetenz bedeutet für die **erste Phase** der Ausbildung,

- dass eine gute fachwissenschaftliche Ausbildung an der Universität geleistet werden muss.
- dass die fachdidaktischen Anteile an der Universität von einer wissenschaftlich arbeitenden Fachdidaktik erbracht werden müssen.
- dass neben die traditionellen Arten des Wissenserwerbs vornehmlich im Vorlesungs- und Seminarstil umfangreicher als bisher kommunikative und die Eigenbeteiligung der Studierenden fördernde Arbeitsformen in der Fachwissenschaft und Fachdidaktik „Mathematik“ eingesetzt werden müssen.
- dass die Abschnitte des „Werdens der mathematischen Erkenntnis“ deutlich stärker betont werden müssen gegenüber den Abschnitten der Weitergabe von „gewordener mathematischer Erkenntnis“.
- dass neben die Sichtweisen der reinen Fachwissenschaft auch fachübergreifende Aspekte vielfältig hinzu kommen müssen.
- dass die Übernahme von grundlegenden Elementen der Informatik und der selbstverständliche Einsatz von Rechnern im Ausbildungsgang üblich wird.
- dass zu den gemeinsamen Ausbildungsanteilen von Lehramts- und Diplomstudiengang auch eigenständige Veranstaltungen treten, in denen den spezifischen Anforderungen an Lehramtsstudenten Rechnung getragen wird, z.B. in Geometrie, Stochastik sowie in angewandter Mathematik und Modellbildung.
- dass für das 1. Staatsexamen Prüfungsanteile aus dem Gebiet der Didaktik der Mathematik vorgeschrieben werden.
- dass die Gestaltung der Schulpraktika institutionell besser als bisher auf die Stationen der fachdidaktischen Ausbildung abgestimmt und mit ihnen verknüpft werden müssen.

Hierdurch wird auf der Basis eines wissenschaftlichen Studiums eine stärkere Berufsorientierung erreicht.

Ein wesentliches Ziel der Fachausbildung in der **zweiten Phase** besteht darin, dass Referendarinnen und Referendare Unterricht kompetent selbst entwerfen und gestalten können. Insbesondere sollen die Auszubildenden darin Sicherheit gewinnen, Lernprozesse kreativ zu initiieren, zu moderieren, zu stützen und zu reflektieren. Sie müssen zu Experten für Lernprozesse werden und nicht darauf angewiesen sein, den selbst erlebten Mathematikunterricht zu perpetuieren. Auf die Ausführungen in Kapitel 2 wird verwiesen.

Dies alles kann nur erreicht werden, wenn in der ersten Phase Mathematik nicht nur als Fertigprodukt erlebt wird, wenn Computereinsatz eine angemessene Rolle spielt und wenn lehramtsspezifische Kenntnisse in Stochastik und in Geometrie vermittelt werden. Die Studienseminare sind damit überfordert, Defizite der ersten Phase aufzuarbeiten.

4.2 Lehrerfortbildung

Wie können Lehrer, die selbst nur totes Mathematikwissen haben,
lebendigen Mathematikunterricht geben?

(Peter Baireuther¹¹)

Wenn Mathematikunterricht sich verändern soll, müssen innovative Gedanken und Maßnahmen in die Schule transportiert werden. Es reicht nicht aus, darauf zu hoffen, dass junge nachrückende Assessorinnen und Assesoren neue Ideen in die Kollegien tragen. Aufgrund der Einstellungs- und Ausbildungssituation kann dies allenfalls als flankierende Maßnahme gewertet werden. Unterrichtsinhalte und Unterrichtskultur sind nur durch die Arbeit der Lehrkräfte vor Ort zu beeinflussen. Um hier neue Ideen wirken zu lassen, müssen diese im Rahmen von Fortbildungsveranstaltungen auf unterschiedlichen Stufen (zentral, regional, schulintern) dafür sensibilisiert werden.

Bestandsaufnahme:

Die Analyse von Fortbildungsmethoden in Industrie und Wirtschaft ergibt, dass sich reine Vortragsveranstaltungen nicht als effektiv erwiesen haben. Seit geraumer Zeit werden dort Fortbildungen überwiegend als Workshops mit entsprechend geschulten Trainern durchgeführt. Der zentrale Gedanke dabei ist, dass die Person ganz in den Prozess einbezogen sein muss. Nach zentralen Eingangsinformationen (unter Nutzung aller Möglichkeiten der audiovisuellen Kommunikation) werden an Fallbeispielen Situationen und damit verbundene Prozesse simuliert, die der Realität möglichst nahe kommen. Die Breite rein kognitiver Informationsübermittlung wird zugunsten der tiefen Durchdringung eines Beispiels oder Problems bewusst reduziert. Die fortzubildende Person lernt im Rahmen der Veranstaltung, mit auftretenden Problemen sowohl sachgerecht als auch kreativ umzugehen. Hierbei ist die Arbeit im Team ein wichtiger zentraler Aspekt. Jede Person soll nach der Fortbildung gestärkt an ihren Arbeitsplatz zurückgehen. Dazu gehört, dass zum Abschluss einer derartigen Veranstaltung die Situation, der Prozess und die eigene Rolle reflektiert und analysiert werden.

Für die Planung der Lehrerfortbildung müssen einerseits die Defizite der ersten und zweiten Ausbildungsphase berücksichtigt werden, andererseits aber auch die oft über 10.000 Stunden Unterrichtserfahrung, die die Lehrerinnen und Lehrer bereits im Rahmen ihrer Unterrichtspraxis ohne weitere Begleitung hinter sich haben.

Die Lehrkräfte in den Fortbildungsveranstaltungen sind in der Regel aufgeschlossen und bereit, neue Gedanken zum Mathematikunterricht aufzunehmen. Da jedoch die Teilnahme an Fortbildungsveranstaltungen freiwillig ist, können nur Fortbildungswillige erfasst werden. Über diese Gruppe hinaus sehen viele Lehrkräfte noch nicht die Notwendigkeit der Auseinandersetzung über einen veränderten Mathematikunterricht.

Konsequenzen:

Aus der Bestandsaufnahme ergibt sich die Forderung, dass die Fortbildung in Inhalt und Form neu gestaltet werden muss, aber auch Bewährtes weiter auszubauen und zu pflegen ist.

Wenn Lehrerinnen und Lehrer im Rahmen ihrer Ausbildung und ihrer täglichen Arbeit selten über Grundsätze des Mathematikunterrichts reflektiert haben, muss es ein vordringliches Ziel sein, hier entsprechende Prozesse in Gang zu setzen. Inhalte der Lehrerfortbildung müssen sich verstärkt am Unterrichtsalltag orientieren und die Lehrkräfte in die Situation versetzen, Mathematik unmittelbar erfahren zu können.

Will man Form und Kultur von Unterricht verändern, so muss sich dieses auch in der Fortbildung widerspiegeln. Die Lehrkräfte erleben diese als Unterricht in der Rolle von Lernenden und können so Inhalt und Form der Fort-

¹¹ Biehler, Heymann, Winkelmann [1995], S. 166.

bildung als wertvoll für den eigenen Unterricht begreifen. Hier liegen Chance und Auftrag derartiger Veranstaltungen.

Eintägige oder halbtägige Veranstaltungen geben wenig Möglichkeit, Diskussionen in Gang zu setzen und damit Prozesse zu verstärken. Sinnvoller sind mehrtägige Fortbildungen auf lokaler Ebene, über die Hilfen zur selbständigen Aneignung vermittelt werden. Häufig bietet sich eine Zweiteilung an: Zuerst die Einführung in das Thema in der Form eines Workshops, dann die Vorstellung von Unterrichtseinheiten mit entsprechender Reflexion. Auch regelmäßige regionale Mathematik-Gesprächskreise können eine Form der Lehrerfortbildung sein, ebenso fachbezogene schulinterne Veranstaltungen.

Schulentwicklung ist nicht ohne Entwicklung von Unterricht denkbar. Daher dient Fortbildung nicht nur persönlicher Entwicklung, sondern der Entwicklung von Schule. Kollegien sollen Personen bewusst zu Fortbildungen entsenden und Fortbildungsveranstaltungen Einzelner gemeinsam in der Schule weiterentwickeln und fruchtbar machen. Die Teilnahme von möglichst zwei Lehrkräften einer Schule ist empfehlenswert, da auf diese Weise eher sichergestellt wird, dass Inhalte und Form von Unterricht in den Kollegien zum Gespräch wird.

Es ist notwendig, zu den einzelnen Veranstaltungen nach einer entsprechenden Zeit mit den Teilnehmern einen Erfahrungsaustausch durchzuführen. Neue Gedanken zum Mathematikunterricht sollen ausprobiert und dann wieder in die Fortbildung eingebracht werden.

Für Fortbildungsveranstaltungen bilden interne Referentinnen und Referenten aus den Schulen vor Ort ein wesentliches Potential. Die Aufgabe, qualifizierte Lehrkräfte in ausreichender Zahl zu gewinnen und zu betreuen, muss langfristig angelegt sein und als ein zentrales Anliegen der Lehrerfortbildung angesehen werden.

4.3 Konzeption von Rahmenrichtlinien

Die oft übliche Struktur von Rahmenrichtlinien für den Unterricht gliedert nach allgemeinen Zielen und Aufgaben, Unterrichtsverfahren und Unterrichtsinhalten, die abschnittsweise hintereinander angeordnet werden. Dieses Verfahren beklagte bereits Lenné [1969], der die Verknüpfung bestimmter Unterrichtsformen und allgemeiner Bildungsziele forderte.

Um diesen Zusammenhang deutlich werden zu lassen, muss von dem üblichen Aufbau der Rahmenrichtlinien abgewichen werden. Für die Planung des künftigen Mathematikunterrichts sind die folgenden Hinweise zu beachten:

- Inhalte, methodische Bedingungen für den Lernprozess und angestrebte Fähigkeiten, Einstellungen und Verhaltensweisen der Schülerinnen und Schüler müssen unter Berücksichtigung fundamentaler Ideen und der beiden Aspekte der Mathematik für ein großes Themenfeld oder eine ganze Jahrgangsstufe aufeinander bezogen und miteinander verknüpft werden, so dass ein integriertes Konzept entsteht.
- Bei der Auswahl der Inhalte und der Methoden sowie ihrer Verknüpfung müssen insbesondere die in Kapitel 2 dieser Empfehlungen dargelegten Konsequenzen für den Unterricht beachtet werden.
- Ferner ist dem Umstand Rechnung zu tragen, dass Computer bzw. Taschencomputer existieren und in den Unterricht eingebunden werden müssen.

Die Inhalte in beiden Sekundarbereichen sollten neu gewichtet werden. Eine Rückwendung zur Geometrie und Hinwendung zur Stochastik ist unter Verminderung der Anteile von Algebra und Analysis realisierbar.

4.4 Primar- und Orientierungsstufe

Die Überlegungen zum Mathematikunterricht in Kapitel 2 lassen sich auch auf den Unterricht der Primar- und Orientierungsstufe beziehen. Eine Abstimmung gemeinsamer Zielsetzungen hilft Brüche bei den Übergängen der Schulformen zu vermeiden sowie den kontinuierlichen Lernprozess zu sichern und zu verbessern.

Im Folgenden sollen exemplarisch zwei Aspekte beleuchtet werden:

- Zum einen müssen Schülerinnen und Schüler der Grundschule und Orientierungsstufe einfache Problemstellungen mathematisieren können, zum anderen muss das Verbalisieren mathematischer Sachverhalte, auch in schriftlichen Arbeiten, in vollständigen Sätzen verstärkt gefördert werden.
- Es muss darüber nachgedacht werden, wie weit schriftliche Divisionen (z.B. $19857 : 32$) noch beherrscht werden müssen. Unter Umständen ist es sinnvoller, die Größenordnung (z.B. $18000 : 30$) zu erfassen. Daher wäre zu prüfen, ob ausgedehnte Übungsphasen zum Inhalt „Dezimalbrüche addieren und subtrahieren, multiplizieren und dividieren“ gestrafft werden müssten zugunsten von Überschlagsrechnungen, da diese im Zeitalter des verstärkten Rechneinsatzes wichtiger werden. Prinzipiell muss das Verstehen von Rechenverfahren mehr Bedeutung als das reine, teilweise sinnentleerte Beherrschen derselben gewinnen.

Es muss ferner überlegt werden, ob in den Jahrgangsstufen 5 und 6 Stochastik, Geometrie und Algebra zu gleichen Teilen unterrichtet werden sollen. Auch curriculare Umstrukturierungen wie eine Entzerrung der Bruchrechnung und ein größeres Gewicht für die räumliche Geometrie sollten erwogen werden. Ebenso darf die Frage nach einem sinnvollen und lernprozessfördernden Einsatz der neuen Technologien wie Taschenrechner, Taschencomputer oder Personalcomputer nicht ausgeklammert werden.

5 Fazit

Wenn unser Unterricht heute darin besteht, dass wir Kindern Dinge beibringen,
die in einem oder zwei Jahrzehnten besser von Maschinen erledigt werden,
beschwören wir Katastrophen herauf.
(Hans Freudenthal¹²)

Die Bildungsaufgaben des Mathematikunterrichts verdeutlichen nachdrücklich, inwiefern grundlegende Kenntnisse und Fähigkeiten im Fach Mathematik zur Welterschließung und Studierfähigkeit beitragen. Ältere und neuere didaktische Publikationen sowie allgemeine Ausführungen in Rahmenrichtlinien befinden sich überwiegend im Einklang mit diesen Bildungsaufgaben. Dennoch bleibt festzustellen, dass der Mathematikunterricht häufig nicht oder nur teilweise die angestrebten Bildungsziele verfolgt. Das liegt zum großen Teil am einseitigen Bild von Mathematik, welches in Schule und Ausbildung bis hinein in die Universitäten geprägt wird und sich in den Köpfen fast aller festgesetzt zu haben scheint. Will man die Bildungsziele im Mathematikunterricht erreichen, so muss diesem einseitigen und zum Teil falschen Bild von Mathematik auf vielen Ebenen entgegengewirkt werden. Wie das in Zukunft geschehen könnte, wird anhand der Punkte Unterrichtskultur, Aus- und Fortbildung, Rahmenrichtlinien sowie Taschencomputer noch einmal zusammenfassend dargestellt.

Unterrichtskultur:

Da sich heute die Strukturen immer schneller verändern, wird die Bereitschaft zu lebenslangem Lernen zunehmen müssen. Hierzu hat auch die Schule ihren Beitrag zu leisten, indem sie die Jugendlichen befähigt, das „Lernen zu lernen“. Dadurch verlieren die Lehrpersonen ihre Funktion als reine Vermittler von Fakten und Lösungsmustern. Wichtiger als Wissen ist der Umgang mit Wissen. Der verständige Einsatz zur Verfügung stehender Hilfsmittel und die Verknüpfung der herausgearbeiteten Fakten müssen im Unterricht verstärkt gelernt werden.

Ein sinnstiftender Schwerpunkt des Unterrichts muss die Erfassung der jeweiligen Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler sowie deren konstruktive Aufarbeitung zur Ausbildung von Grundvorstellungen und Begriffen werden. Die Rolle der Lehrkräfte verschiebt sich dadurch von Experten des Fachwissens zu Experten des Lernprozesses.

Auch der Mathematikunterricht muss einen Beitrag dazu liefern, Selbstvertrauen und Kritikfähigkeit der Schülerinnen und Schüler zu stärken. Die anzustrebende Unterrichtskultur muss sie verstärkt als Individuen in den Mittelpunkt stellen. Schülerinnen und Schüler müssen zu mehr Eigenaktivität angeregt werden. Ihre Schwierigkeiten und Fehler müssen fruchtbar in den Unterrichtsverlauf eingebunden werden, so dass sie erkennen, dass gemachte Fehler einen Erkenntnisprozess initiieren können. Ziel eines jeden guten Unterrichts muss ebenfalls sein, über das Akzeptieren von Mitschülerinnen und -schülern deren Fertigkeiten und Fähigkeiten einzubinden und im Team kompetent zu nutzen.

Es müssen die Wertschätzung des Lernens und die Bereitschaft, zu lernen, deutlich gesteigert werden. Es darf nicht versäumt werden, den Lernenden zu verdeutlichen, dass Ziele nicht ohne Anstrengung erreicht werden können. Dies kann die Schule allein nicht leisten.

Aus- und Fortbildung:

Um zu verhindern, dass Referendarinnen und Referendare nur ihren eigenen selbst erlebten Unterricht reproduzieren und damit z. T. das oben erwähnte falsche Bild von Mathematik perpetuieren, muss sich die Ausbildung

¹² Freudenthal [1973], Band 1, S. 61.

entscheidend ändern. In der Lehrerbildung der ersten Phase muss ein vielfältiges Angebot an spezifischen Veranstaltungen für Lehramtsstudiengänge angeboten werden. Die Studierenden müssen sich mit den Einsatzmöglichkeiten von Computern und deren Grenzen befassen. Entscheidend wird sein, dass der didaktische Anteil der ersten Phase von wissenschaftlich arbeitenden Fachdidaktikern wahrgenommen wird und dass zum einen die Zusammenarbeit zwischen Fachwissenschaftlern und Didaktikern, zum anderen zwischen Universität, Studienseminar und Schule gelingt.

Der Fortbildung der Lehrerinnen und Lehrer kommt im Hinblick auf die geforderten Veränderungen besondere Bedeutung zu.

Umsetzung der Ziele in Rahmenrichtlinien:

In den neuen Rahmenrichtlinien muss sich die Aufstellung des Curriculums an den fundamentalen Ideen und an den beiden Aspekten der Mathematik orientieren. Der notwendige Verzicht auf streng linear und hierarchisch geordnete Inhaltssequenzen sowie die erforderliche Verknüpfung bestimmter Unterrichtsstoffe, Unterrichtsformen und allgemeiner Bildungsziele bedingen ein Verlassen der üblichen Struktur von Rahmenrichtlinien. Insbesondere sollen Inhalte vernetzt und geschichtlich eingeordnet, Querbezüge hergestellt und Inhalts- und Kontextgrenzen überschritten sowie Anwendungen und Modellierungen in weit höherem Maße als bisher berücksichtigt werden.

Des Weiteren besteht die Möglichkeit, die Inhalte in den Sekundarbereichen I und II neu zu gewichten. Eine Rückwendung zur Geometrie und Hinwendung zur Stochastik ist unter Verminderung der Anteile von Algebra und Analysis realisierbar.

Zusätzlich müssen Lehrerinnen und Lehrer in den Rahmenrichtlinien konkrete Hinweise auf methodische Möglichkeiten und Bedingungen erhalten, wie dieser künftige Mathematikunterricht praktiziert werden kann. Die Aufnahme von exemplarischen Unterrichtseinheiten in die Rahmenrichtlinien ist hilfreich.

Taschencomputer:

Durch den Einzug leistungsfähiger Taschencomputer mit ihren numerischen, symbolischen und graphischen Fähigkeiten wird immer deutlicher, dass ein rein kalkülorientierter Mathematikunterricht keinen Sinn hat. Kalkülkompetenz wird in Zukunft bedeuten, Terme aufstellen und interpretieren zu können, Termstrukturen erkennen zu können sowie den Rechner adäquat benutzen und seine Ergebnisse beurteilen zu können. Für Schülerinnen und Schüler liegt in der Verwendung von Taschencomputern eine Chance, nicht mehr wie bisher an mangelnden Kalkülfertigkeiten zu scheitern. Die graphischen, numerischen und symbolischen Fähigkeiten des Taschencomputers ermöglichen vielfältige Lösungsmöglichkeiten. Dies regt an, über Vor- und Nachteile der eingeschlagenen Lösungswege zu reflektieren. Die notwendigen Reflexionen über Vorgehensweisen, Alternativen und Lösungen führen zu einer Koexistenz und zu einer gegenseitigen Bereicherung von mathematischer Sprache und Umgangssprache. Dies könnte zu einer Wiederbelebung des mathematischen Aufsatzes führen.

Das Argument, außer- und auch innermathematische Anwendungen nicht behandeln zu können, weil Termumformungen zu komplex, Datenmengen zu groß und Zahlen zu „realistisch“ sind, entfällt angesichts des Einsatzes leistungsfähiger Taschencomputer.

Um zu gewährleisten, dass entscheidende technische Entwicklungen nicht an den Schulen vorbeigehen und um Schülerinnen und Schüler adäquat vorbereitet in die Ausbildung entlassen zu können, muss die Verwendung von moderner Technik initiiert und gefördert werden.

Bei den angestrebten Veränderungen des Mathematikunterrichts handelt es sich keineswegs um neue Ziele, sondern nur darum, wie tradierte Ziele besser erreicht werden können. Hierzu allerdings müssen Inhalte und Methoden des Mathematikunterrichts grundlegend geändert werden, um nicht die von Freudenthal im oben angegebenen Zitat beschriebene Katastrophe eintreten zu lassen.

Quellenverzeichnis

- Baumert, Jürgen & Lehmann, Rainer & al., TIMSS – Mathematisch–naturwissenschaftlicher Unterricht im internationalen Vergleich, Opladen 1997
- Biehler, Rolf & Heymann, Hans Werner & Winkelmann, Bernard (Hrsg.), Mathematik allgemeinbildend unterrichten: Impulse für Lehrerbildung und Schule, IDM–Reihe „Untersuchungen zum Mathematikunterricht“, Bd. 21, Köln, 1995
- Bigalke, Hans–Günter, Zur „Gesellschaftlichen Relevanz“ der Mathematik im Schulunterricht – Aufgaben und Ziele des Mathematikunterrichts, Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 8(1), 1976, S. 25 – 34
- Blum, Werner et al., Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht, Schriftenreihe der ISTRON–Gruppe, Band 0 – 4, Hildesheim 1994 – 97
- Bruner, Jerome S., Der Prozeß der Erziehung, Berlin 1970
- Davis, Philip J. & Hersh, Reuben, Descartes' Dream, Harmondsworth 1990 (Nachdruck von 1986)
- Dormolen, Johan van, Didaktik der Mathematik, Braunschweig 1978
- Dörfler, W. (Hrsg.), Empirische Untersuchungen zum Lernen und Lehren von Mathematik, Wien 1985
- Freudenthal, Hans, Mathematik als pädagogische Aufgabe, 2 Bände, Stuttgart 1973
- Herget, Wilfried, Probieren, Entdecken, Forschen, Der Mathematikunterricht, 35 (4), 1989, S. 5 – 21
- Heymann, Hans–Werner, Allgemeinbildung und Mathematik, Weinheim 1996
- Hischer, Horst (Hrsg.), Mathematikunterricht und Computer (Tagungsband), Hildesheim 1994
- Hofe, Rudolf vom, Grundvorstellungen mathematischer Inhalte, Heidelberg 1995
- Klafki, Wolfgang, Neue Studien zur Bildungstheorie und Didaktik, Weinheim 1985
- Lenné, Helge, Analyse der Mathematikdidaktik in Deutschland, Stuttgart 1969
- Lietzmann, Walther, Methodik des mathematischen Unterrichts, Heidelberg 1961, 3. Auflage
- Malle, Günther, Didaktische Probleme der elementaren Algebra, Braunschweig 1993
- Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht, Zusammenfassender Bericht über die Anhörung der KMK zur TIMS–Studie, MNU 50(7), 1997, S. 441 – 442
- Niedersächsisches Kultusministerium (Hrsg.), Ziele und Inhalte eines künftigen Mathematikunterrichts an Gymnasien, Fachgymnasien und Gesamtschulen (Tagungsband Lingen), 1994
- Niedersächsisches Schulgesetz in der Fassung vom 27.9.1993, zuletzt geändert am 20.5.1996
- Schweiger, Fritz, Fundamentale Ideen, Journal für Mathematik–Didaktik 13, 1992, S. 199 – 214
- Schwill, Andreas, Fundamentale Ideen der Informatik, Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 25(1), 1993, S. 20 – 31
- Tietze, Uwe–Peter & Klika, Manfred & Wolpers, Hans, Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II, Braunschweig 1987
- Winter, Heinrich, Allgemeine Lernziele für den Mathematikunterricht, Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 7(3), 1975, S. 106 – 116
- Wittenberg, Alexander Israel, Bildung und Mathematik, Stuttgart 1963
- Wittmann, Erich Chr., Grundfragen des Mathematikunterrichts, Braunschweig 1978, 5. Auflage

Mitglieder der Kommission:

Hermann Haarmann, Hildesheim

Dr. Horst Hischer, Braunschweig (zeitweise)

Reinhold Hoffmann, Leer

Heiko Knechtel, Stadthagen

Henning Körner, Wolfsburg

Christine Lenck-Ackermann, Bad Gandersheim

Andreas Meisner, Braunschweig

Jörg Meyer, Hameln

Bettina Starke, Lüneburg (zeitweise)

Prof. Günter Steinberg, Oldenburg

Dietrich Umbreit, Hannover

Jürgen Wulfstange, Hannover